5

Variáveis Aleatórias Discretas

5.1 VARIÁVEL ALEATÓRIA

Um conceito de fundamental importância para a estatística indutiva é o de *variáveis aleatórias*. Para entender esse conceito, imagine que um dado comum vai ser lançado. Tente dizer qual será o número resultante. É claro que, *antes* do lançamento, não podemos dizer qual é o número que ocorrerá, pois o resultado depende do fator sorte e, por isso, é uma *variável aleatória*.

Uma **variável aleatória** pode ser entendida como variável quantitativa, cujo resultado (valor) depende de fatores aleatórios.

Outros exemplos de variáveis aleatórias são:

a) número de coroas obtido no lançamento de duas moedas;
b) número de itens defeituosos em uma amostra retirada, aleatoriamente, de um lote;
c) número de defeitos em um azulejo que sai da linha de produção;
d) número de pessoas que visitam um determinado *site*, num certo período de tempo;
e) volume de água perdido por dia, num sistema de abastecimento;
f) resistência ao desgaste de um tipo de aço, num teste padrão;

g) tempo de resposta de um sistema computacional;

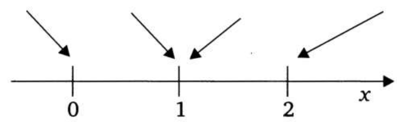
h) grau de empeno em um azulejo que sai da linha de produção.

Todos os exemplos acima têm uma característica comum: além do resultado ser quantitativo (valor real), não podemos prevê-lo com exatidão, pois ele depende de experimento aleatório.

Embora no exemplo do dado os valores que a variável aleatória pode assumir coincidam com o espaço amostrai do experimento, este não é um caso geral. No exemplo (a), *lançamento de 2 moedas*, o espaço amostrai mais completo é Ω = {(cara, cara), (cara, *coroa), {coroa, cara), (coroa, coroa)}*, enquanto que a variável aleatória *número de coroas* assume valores no conjunto {0, 1, 2}. Mas existe uma relação (função) entre os dois conjuntos, conforme mostra o esquema a seguir:

Ω = {(*cara, cara*), (*cara, coroa*), {*coroa, cara*), (*coroa, coroa*)}

X:



Formalmente, uma **variável aleatória** é uma função que associa elementos do espaço amostrai ao conjunto de números reais.

As variáveis aleatórias podem ser discretas ou contínuas, conforme mostra a Figura 5.1.

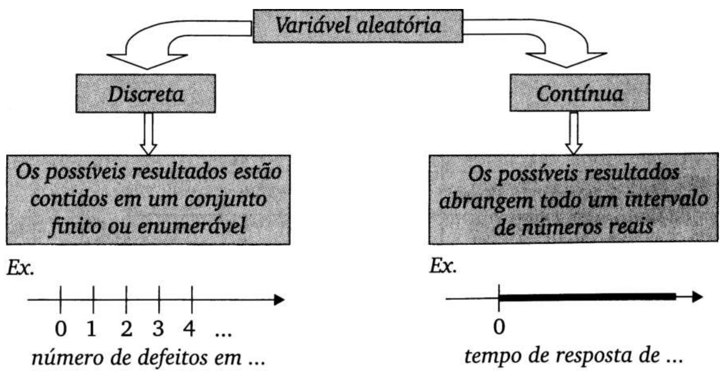


Figura 5.1 *Variáveis aleatórias discretas e contínuas.*

Os casos (a) - (d) são exemplos de variáveis aleatórias *discretas* e os casos (g) - (h) são exemplos de variáveis aleatórias *contínuas.* No restante deste capítulo, trataremos apenas do primeiro caso.

Cabe observar que as variáveis qualitativas também podem ser caracterizadas como variáveis aleatórias discretas, desde que as representemos como *variáveis indicadoras* 0 ou 1. Por exemplo, ao avaliar azulejos que saem de uma linha de produção, cada azulejo pode ser classificado como *bom* ($X = 0$) ou *defeituoso* ($X = 1$). Nesse caso, a variável aleatória discreta X está definida como variável indicadora de item defeituoso.[1]

5.1.1 Distribuição de probabilidades

Definida uma variável aleatória discreta, temos a descrição do que *pode* ocorrer no experimento aleatório. Em alguns casos e sob certas suposições, temos duas informações:

- quais resultados podem ocorrer;
- qual é a probabilidade de cada resultado acontecer.

Exemplo 5.1 Seja a variável aleatória X = *número obtido no lançamento de um dado comum.* Se assumirmos o dado perfeitamente equilibrado e o lançamento imparcial, podemos alocar as seguintes probabilidades aos valores possíveis de X:

Valores possíveis x	**Probabilidades** $p(x)$
1	$^1/_6$
2	$^1/_6$
3	$^1/_6$
4	$^1/_6$
5	$^1/_6$
6	$^1/_6$
Total	1

Ou, mais resumidamente, $p(j) = {}^1/_6$ 0 = 1. 2, 3, 4, 5, 6).

1 Se houver mais de duas categorias (por exemplo, A, B e C), podemos usar mais de uma variável indicadora. No caso de três categorias, podem ser empregadas as variáveis aleatórias X e Y, onde $X = 1$ se ocorrer B, e $X = 0$ caso contrário; $Y = 1$ se ocorrer C, e $Y = 0$ caso contrário. A ocorrência de A estaria representada por $X = 0$ e $Y = 0$.

A **distribuição de probabilidades** de uma variável aleatória X é a descrição do conjunto de probabilidades associadas aos possíveis valores de X, conforme foi ilustrado no exemplo precedente. Observe que a soma das probabilidades dos valores possíveis de X é igual a 1 (um).

Se X for discreta, com possíveis valores $\{x_1, x_2, \ldots\}$, então a *distribuição de probabilidades* de X pode ser apresentada pela chamada **função de probabilidade,** que associa a cada valor possível x_t a sua probabilidade de **ocorrência** $p(x)$ **ou seja:**

$$p(x_i) = P(X = x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

Uma *função de probabilidade* deve satisfazer:

a) $p(x_i) \geq 0$;

b) $\sum_i p(x_i) = 1$

Existe certa similaridade entre as distribuições de probabilidades e as distribuições de freqüências vistas no Capítulo 3. Contudo, na distribuição de probabilidades são mostrados os *possíveis valores* e não os valores efetivamente observados. Além disso, as probabilidades são, geralmente, alocadas a partir de suposições a respeito do experimento aleatório em questão, enquanto as freqüências são obtidas com efetivas realizações do experimento.

A Figura 5.2 apresenta gráficos que podem ser usados para representar a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta. O gráfico em hastes (do lado esquerdo) é típico para variáveis aleatórias discretas. Já o gráfico em forma de histograma (do lado direito) é construído com o cuidado de a área total ser igual à unidade.

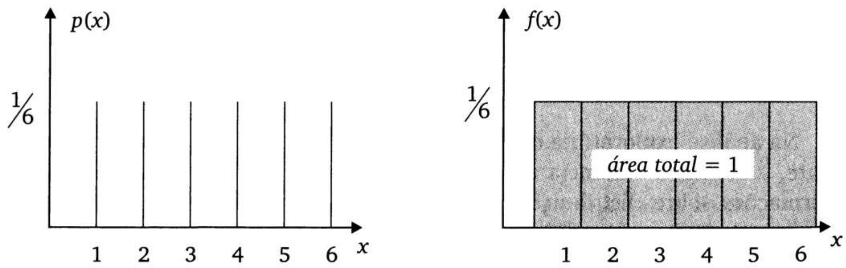


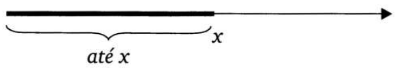
Figura 5.2 *Representações gráficas da distribuição de probabilidades da variável aleatória X = número obtido no lançamento de um dado comum.*

5.1.2 Função de distribuição acumulada

Outra forma de representar uma distribuição de probabilidades de uma variável aleatória é através de sua função de distribuição acumulada, que é definida por:

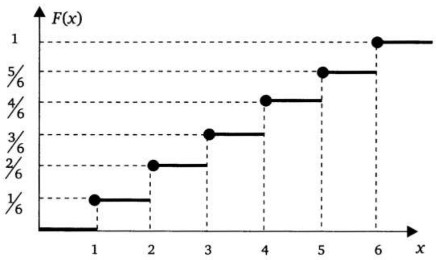
$$F(x) = P(X \leq x), \quad \forall x \in \Re \tag{5.1}$$

Assim, para todo *x e* R a função de distribuição acumulada descreve a probabilidade de ocorrer um valor *até x,* conforme é ilustrado a seguir:



A variável aleatória X = *número obtido no lançamento de um dado comum* tem a seguinte função de distribuição acumulada:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ {}^1\!/_6 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ {}^2\!/_6 & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ {}^3\!/_6 & \text{se } 3 \leq x < 4 \\ {}^4\!/_6 & \text{se } 4 \leq x < 5 \\ {}^5\!/_6 & \text{se } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{se } x \geq 6 \end{cases}$$



Observe que os pontos em que a função de probabilidade descreve probabilidades não nulas correspondem a saltos na função de distribuição acumulada e, também, que a altura de cada salto eqüivale ao valor da probabilidade naquele ponto. Assim, para todo *x e* R, há uma relação direta entre $p(x)$ e F(x).

5.1.3 Valor esperado e variância

Na análise exploratória de dados, discutimos algumas medidas (particularmente, a média, a variância e o desvio padrão - Capítulo 3) para sintetizar as informações sobre distribuições de freqüências de variáveis quantitativas. De forma análoga, essas medidas também podem ser definidas para as variáveis aleatórias, com o objetivo de sintetizar características relevantes de uma distribuição de probabilidades. Considere uma variável aleatória X e sua distribuição de probabilidades:

Valores possíveis	Probabilidades
x_1	p_1
x_2	p_2
x_3	p_3
...	...
x_k	p_k
Total	1

A *média* ou *valor esperado* de uma variável aleatória X é dado por:

$$\boxed{\mu = E(X) = \sum_{j=1}^{k} x_j p_j} \tag{5.2}$$

E a *variância* por:

$$\boxed{\sigma^2 = V(X) = \sum_{j=1}^{k} (x_j - \mu)^2 p_j} \tag{5.3}$$

Alternativamente, a variância pode ser calculada por:[2]

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - \mu^2} \tag{5.4}$$

onde: $E(X^2) = \sum_{j=1}^{k} x_j^2 p_j$

E o *desvio padrão* é dado por:

$$\boxed{\sigma = DP(X) = \sqrt{Var(X)}} \tag{5.5}$$

Retomemos o exemplo da variável aleatória X = *número obtido no lançamento de um dado comum,* em que a função de probabilidade é dada por:

$$p(j) = {}^1/_6 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

2 A demonstração da equivalência de (5.3) e (5.4) é apresentada a seguir:

$$V(X) = \sum_{j=1}^{k} (x_j - \mu)^2 p_j = \sum_{j=1}^{k} (x_j^2 - 2x_j\mu + \mu^2) p_j = \sum_{j=1}^{k} x_j^2 p_j - 2\mu \sum_{j=1}^{k} x_j p_j + \sum_{j=1}^{k} p_j \mu^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} x_j^2 p_j - 2\mu\mu + \mu^2 \sum_{j=1}^{k} p_j = \sum_{j=1}^{k} x_j^2 p_j - 2\mu^2 + \mu^2 = \sum_{j=1}^{k} x_j^2 p_j - \mu^2 = E(X^2) - \mu^2.$$

e calculemos o valor esperado e a variância.

$$E(X) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right) = 3{,}5$$

$$E(X^2) = 1^2\left(\frac{1}{6}\right) + 2^2\left(\frac{1}{6}\right) + 3^2\left(\frac{1}{6}\right) + 4^2\left(\frac{1}{6}\right) + 5^2\left(\frac{1}{6}\right) + 6^2\left(\frac{1}{6}\right) = 15{,}167$$

Assim, $V(X) = E(X^2) - \mu^2 = 15{,}167 - (3{,}5)^2 = 2{,}92$.

Considerando que as probabilidades podem ser interpretadas como limite da freqüência relativa quando o experimento é executado muitas e muitas vezes, podemos interpretar o *valor esperado* como a média aritmética dos resultados da variável aleatória se o experimento pudesse ser repetido infinitas vezes. Assim, se pudéssemos lançar o dado infinitas vezes, obteríamos, em média, 3,5 pontos por lançamento. Já a variância informa sobre a dispersão dos possíveis valores.

Observe que, no presente exemplo, o valor esperado $\mu = 3{,}5$ é um número que a variável aleatória *não* pode assumir. Fisicamente, o *valor esperado* corresponde ao *centro de gravidade* da distribuição de probabilidades.

Algumas propriedades

Sendo c uma constante e X e Y variáveis aleatórias, as seguintes relações podem ser comprovadas:

a) $E(c) = c$	f) $V(c) = 0$
b) $E(X + c) = E(X) + c$	g) $V(X + c) = V(X)$
c) $E(cX) = cE(X)$	h) $V(cX) = c^2V(X)$
d) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$	i) $DP(cX) = \|c\|DP(X)$
e) $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$	

As relações (b) e (g) mostram que ao somar uma constante a uma variável aleatória, a distribuição de probabilidades é deslocada por esta constante, mas a variabilidade é preservada. Todavia, ao multiplicar a variável aleatória por uma constante - relações (c) e (h) -, o centro da distribuição é deslocado na mesma proporção e a variabilidade também é alterada (ver Figura 5.3).

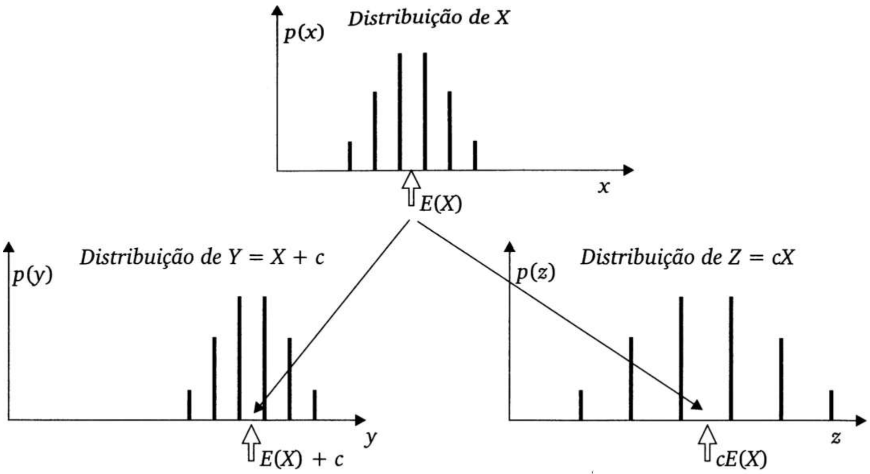


Figura 5.3 *Efeito da soma e da multiplicação de uma constante sobre uma variável aleatória.*

5.1.4 Variáveis aleatórias independentes

Considere que um dado seja lançado duas vezes, sob as mesmas condições. Seja $X_($ a variável aleatória que representa o número de pontos obtido no z-ésimo lançamento (í = 1, 2). Supondo que o dado seja perfeitamente equilibrado e o lançamento imparcial, então X_1 e X_2 têm a mesma função de probabilidade, que é dada por:

$$P(j) = {}^1/_6 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

Considere, também, a variável aleatória S como o número total de pontos obtidos nos dois lançamentos, isto é,

$$S = X_1 + X_2$$

A função de probabilidade de S pode ser obtida com base em funções de probabilidades de X_l e X_2 , resultando em:

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p(s)	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

Note que, se o primeiro lançamento for realizado e ocorrer o resultado x_1 sendo $x_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a função de probabilidade de X_2 permanece a mesma, pois o segundo lançamento independe do primeiro. Assim, podemos dizer que X_1 e X_2 **são** *variáveis aleatórias independentes.*

No entanto, a função de probabilidade de S é alterada. Por exemplo, se ocorrer o valor 1 ($X_1 = 1$), então a distribuição de S passa a ser:

Possíveis valores de S dado que $X_1 = 1$	2	3	4	5	6	7
Probabilidades	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Já se ocorrer $X_1 = 6$, passamos a ter:

Possíveis valores de S dado que $X_1 = 6$	7	8	9	10	11	12
Probabilidades	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Ou seja, X_1 e S **não** são *variáveis aleatórias independentes.*

Em geral, X_1 X_2, X_n podem ser consideradas **variáveis aleatórias independentes** se o conhecimento de uma não altera as distribuições de probabilidades das demais.

Muitas vezes as características do experimento permitem-nos avaliar se as variáveis aleatórias envolvidas são independentes. Essa condição é importante, pois a maioria dos métodos estatísticos é desenvolvida na suposição de que as observações provêm de variáveis aleatórias independentes.

Considerando a regra do produto, podemos calcular a probabilidade de *sair número par nos dois lançamentos do dado* simplesmente multiplicando a probabilidade de *sair par em cada lançamento,* ou seja, $(1/2) \cdot (1/2) = 1/4$. Podemos representar o evento *sair número par nos dois lançamentos do dado* por:

$\{X1 \in (2, 4, 6), \; X2 \in (2, 4, 6)\}$

E a probabilidade deste evento por:

$$P\{X_1 \in (2, 4, 6), X_2 \in (2, 4, 6)\} = P\{X_1 \in (2, 4, 6)\} \,.\, P\{X_2 \in (2, 4, 6)\} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Para um conjunto de variáveis aleatórias X_1 X_2, ..., X_n, definimos:

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ são **variáveis aleatórias independentes** se e só se:

$P\{X_1 \in E_1, X_2 \in E_2, \ldots, X_n \in E_n\} = P(X_1 \in E_1) \,.\, P(X_2 \in E_2) \,.\, P(X_n \in E_n)$

para quaisquer conjuntos $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

Se X e Y são *variáveis aleatórias independentes,* então:

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) \tag{5.6}$$

$$V(X - Y) = VQO + V(Y) \tag{5.7}$$

Note, por (5.7), que a variância da diferença de duas variáveis aleatórias independentes é a soma das variâncias de cada variável aleatória. Isso decorre da propriedade (h) (Seção 5.1.3).

EXERCÍCIOS

1. Apresente a função de probabilidade para as seguintes variáveis aleatórias:
   a) Número de caras obtido com o lançamento de uma moeda honesta;
   b) Número de caras obtido no lançamento de duas moedas honestas;
   c) Número de peças com defeito em uma amostra de duas peças, sorteadas aleatoriamente de um grande lote, em que 40% das peças são defeituosas;
   d) Número de peças com defeito em uma amostra de três peças, sorteadas aleatoriamente de um grande lote, em que 40% das peças são defeituosas.

2. Apresente, sob forma gráfica, a distribuição de probabilidades do Exercício 1(d).

3. Apresente a função de probabilidade acumulada do Exercício 1(d).

4. Calcule os valores esperados e as variâncias das distribuições de probabilidade do Exercício 1.

5. Considere que um produto pode estar perfeito (B), com defeito leve (DL) ou com defeito grave (DG). Seja a seguinte distribuição do lucro (em R$), por unidade vendida desse produto:

Produto	x	$p(x)$
B	6	0,7
DL	0	0,2
DG	–2	0,1

a) Calcule o valor esperado e a variância do lucro.

b) Se, com a redução de desperdícios, foi possível aumentar uma unidade no lucro de cada unidade do produto, qual é o novo valor esperado e a variância do lucro por unidade?

c) E se o lucro duplicou, qual é o novo valor esperado e variância do lucro por unidade?

6. Certo tipo de conserva tem peso líquido médio de 900 g, com desvio padrão de 10 g. A embalagem tem peso médio de 100 g, com desvio padrão de 4 g. Suponha que o processo de enchimento das embalagens controla o peso líquido, de tal forma que se possa supor independência entre o peso líquido e o peso da embalagem. Qual é a média e o desvio padrão do peso bruto?

5.2 PRINCIPAIS DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS

Na seção anterior, construímos as distribuições de probabilidades de algumas variáveis aleatórias, empregando nosso conhecimento para o cálculo das probabilidades envolvidas. Nesta seção, estudaremos alguns *modelos probabilísticos padrões,* que podem ser usados em diversas situações práticas. O problema passa a ser, então, determinar *qual modelo é o* mais adequado para a situação em estudo e como aplicá-lo adequadamente.

Lembremos que, para identificarmos uma variável aleatória discreta, temos de conhecer *quais resultados* podem ocorrer e *quais são as probabilidades* associadas aos resultados. A seguir, vamos ver os principais modelos discretos.

5.2.1 Distribuição de Bernoulli

Talvez os experimentos mais simples são aqueles em que observamos a presença ou não de alguma característica, que são conhecidos como *ensaios de Bernoulli*. Alguns exemplos:

a) lançar uma moeda e observar se ocorre *cara* ou não;

b) lançar um dado e observar se ocorre *seis* ou não;

c) numa linha de produção, observar se um item, tomado ao acaso, é ou não *defeituoso;*

d) verificar se um servidor de uma *intranet* está ou não ativo.

Denominamos *sucesso* e *fracasso* os dois eventos possíveis em cada caso.[3] O ensaio de Bernoulli é caracterizado por uma variável aleatória X, definida por $X = 1$, se sucesso; $X = 0$, se fracasso. A função de probabilidade de X *(Distribuição de Bernoulli)* é dada por

x	$p(x)$
0	$1 - p$
1	p
Total	1

onde $p = P\{sucesso\}$. A distribuição fica completamente especificada ao atribuirmos um valor para p. No exemplo (a), se o lançamento for imparcial e a moeda perfeitamente equilibrada, $p = 1/2$. Em (b), com suposição análoga, $p = 1/6$. Outras características da distribuição de Bernoulli:

$$E(X) = p \tag{5.8}$$

$$V(X) = p.(1 - p) \tag{5.9}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - p & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se } x \ge 1 \end{cases} \tag{5.10}$$

5.2.2 Distribuição Binomial

Na maior parte das vezes, são realizados n ensaios de Bernoulli. O interesse está no número X de ocorrências de *sucesso,* como nos exemplos a seguir:

a) lançar uma moeda cinco vezes e observar o número de *caras;*

b) numa linha de produção, observar dez itens, tomados ao acaso, e verificar quantos estão *defeituosos;*

c) verificar, num dado instante, o número de processadores ativos, num sistema com multiprocessadores;

d) verificar o número de *bits* que não estão afetados por ruídos, em um pacote com n *bits.*

Nos exemplos precedentes, se for possível supor:

- ensaios *independentes;*
- $P\{sucesso\} = p$, constante para todo ensaio $(0 < p < 1)$.

3 No presente contexto, o termo *sucesso* não significa algo **bom,** mas simplesmente um resultado ou evento no qual temos interesse; e *fracasso,* o outro resultado ou evento possível.

Temos, então, exemplos de *experimentos binomiais.*

Uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros n e p pode ser apresentada por:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n \tag{5.11}$$

onde $X_{l9}\ X_2, \dots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes, sendo cada uma delas com distribuição de Bernoulli de parâmetro p. Como X_t será 0 ou 1, dependendo da ocorrência ou não de sucesso no i-ésimo ensaio (i = 1, 2, ..., n), então a soma X corresponderá ao *número de sucessos*. Para especificarmos a função de probabilidade de X, considere o seguinte exemplo:

Exemplo 5.1 Uma indústria processadora de suco classifica os carregamentos de laranja que chegam a suas instalações em A, B ou C. Suponha independência entre as chegadas dos carregamentos, isto é, a classificação de um não altera a classificação dos demais. Suponha também que a probabilidade p de classificação na classe A é a mesma para todos os carregamentos. Para os próximos 4 carregamentos, seja X a variável aleatória que representa o *número de carregamentos classificados na classe A*. Vamos calcular a probabilidade de que X assuma o valor x, isto é, a probabilidade de que x carregamentos sejam classificados na classe A (x = 0, 1, 2, 3, 4).

Para cada carregamento, seja S (sucesso) quando este for classificado na classe A; e seja F (fracasso) quando este for classificado em outra classe. A Figura 5.4 mostra todas as possíveis seqüências de resultados, os possíveis valores de X e as correspondentes probabilidades.

Resultados possíveis de 4 carregamentos:

			SSFF		
			SFSF		
		SFFF	SFFS	SSSF	
		FSFF	FSSF	SSFS	
		FFSF	FSFS	SFSS	
	FFFF	*FFFS*	FFSS	FSSS	SSSS
Valores de X:	0	1	2	3	4
	↓	↓	↓	↓	↓
Probabilidades:	$(1-p)^4$	$4p(1-p)^3$	$6p^2(1-p)^2$	$4p^3(1-p)$	p^4

Figura 5.4 *Construção de uma distribuição binomial com* n = *4 e* p *genérico.*

Explicando as probabilidades da Figura 5.4. O evento X = 0 ocorre quando nenhum carregamento é classificado na classe A (*FFFF*), cuja probabilidade é

$(1-p)(1-p)(1-p)(1-p) = (1-p)^4$. O evento $X = 1$ ocorre quando um carregamento for classificado na classe *A* (*SFFF* ou *FSFF* ou *FFSF* ou *FFFS*). Como cada um desses resultados tem probabilidade $p(1-p)^3$, a probabilidade do evento $X = 1$ é igual a $4p(1-p)^3$. As outras probabilidades podem ser obtidas de forma análoga.

Coeficientes binomiais

Na Figura 5.4, podemos observar que no cálculo da probabilidade do evento $X = 1$, contamos de quantas maneiras poderia aparecer um sucesso entre as quatro possibilidades, assim encontramos a quantidade quatro, correspondente às seguintes seqüências de respostas: *SFFF, FSFF, FFSF* e *FFFS.*

Em geral, na distribuição binomial, para calcular a probabilidade do evento $X = x$, onde x é um valor possível da variável aleatória X, precisamos conhecer o número de maneiras em que podemos combinar os x sucessos entre os n ensaios. Esse valor, conhecido como coeficiente binomial, entra no cálculo da probabilidade como um coeficiente das potências de p e $1-p$, como verificamos na Figura 5.4.

Vamos representar o número de combinações que podemos fazer com x elementos, numa seqüência de n elementos (sendo $x \leq n$), por $\binom{n}{x}$. Esse número de combinações pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$\boxed{\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}} \qquad (5.12)$$

onde $n! = n(n-1)(n-2)...1$ (lê-se *n fatorial*) e, por convenção, $0! = 1$. Por exemplo, para $n = 4$ temos os seguintes coeficientes binomiais:

$$x = 0: \binom{4}{0} = \frac{4!}{4!.0!} = \frac{4!}{4!} = 1$$

$$x = 1: \binom{4}{1} = \frac{4!}{3!.1!} = \frac{4.3.2.1}{3.2.1.1} = 4$$

$$x = 2: \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!.2!} = \frac{4.3.2.1}{2.1.2.1} = 6$$

$$x = 3: \binom{4}{3} = \frac{4!}{1!.3!} = \frac{4.3.2.1}{1.3.2.1} = 4$$

$$x = 4: \binom{4}{4} = \frac{4!}{0!.4!} = \frac{4!}{4!} = 1$$

Expressão geral da distribuição binomial

Seja X uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros n e p (sendo $0 < p < 1$). A probabilidade de X assumir um certo valor x, pertencente ao conjunto $\{0, 1, 2, ..., n\}$, é dada pela expressão:

$$\boxed{p(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}} \qquad \textbf{(5.13)}$$

Exemplo 5.2 (continuação). Historicamente, 30% dos carregamentos são classificados na classe *A*, em que podemos supor que a probabilidade *p* de um carregamento ser classificado na classe *A* é 0,3. Entre os quatro próximos carregamentos, calculemos a probabilidade de exatamente dois serem classificados na classe *A*.

Temos $n = 4$ e $p = 0,3$. Assim, a probabilidade de *x* carregamentos serem classificados na classe *A* é dada por:

$$p(x) = \binom{4}{x} \cdot (0,3)^x \cdot (0,7)^{4-x} \; (x = 0, 1, 2, 3, 4)$$

Em particular, $p(2) = \binom{4}{2} \cdot (0,3)^2 \cdot (0,7)^{4-2} = 6 \cdot (0,09) \cdot (0,49) = 0,2646$

A Tabela 1 do apêndice apresenta probabilidades da binomial para $n \leq 15$ e *p* múltiplo de 0,05. O Exemplo 5.3 ilustra o uso da tabela.

Exemplo 5.2 Dados históricos mostram que 70% das pessoas que acessam a página p23 da *internet* também acessam a página p24. Obteremos, através da tabela da distribuição binomial, a probabilidade de que, nos dez próximos acessos à p23, a maioria também acesse a p24.

Note que temos um experimento binomial, com $n = 10$ e $p = 0,7$ (supondo independência entre os acessos). Usando a *Tabela da distribuição binomial*, podemos especificar a distribuição de *X* = *número de pessoas que também acessam a p24.* A probabilidade de ocorrer o evento *a maioria também acessar a p24* corresponde, em termos da variável aleatória *X*, ao evento $\{X > 5\}$, como ilustramos ao lado. A probabilidade deste evento será a *soma dos resultados individuais*, ou seja:

Parte da Tabela 1

	n	x	p = 0,70
	10	0	0,0000
		1	0,0001
		2	0,0014
		3	0,0090
		4	0,0368
		5	0,1029
$x > 5$		6	0,2001
		7	0,2668
		8	0,2335
		9	0,1211
		10	0,0282

$P(X > 5) =$

$= p(6) + p(7) + p(8) + p(9) + p(10) =$

$= 0,2001 + 0,2668 + 0,2335 + 0,1211 + 0,0282 =$

$= 0,8497.$

Se *X* tem distribuição binomial de parâmetros *nep*, então seu *valor esperado* e sua *variância* podem ser calculados por:

$$E(X) = n.p \tag{5.14}$$

$$V(X) = n.p.(1 - p) \tag{5.15}$$

A Figura 5.5 mostra duas distribuições binomiais com a indicação da posição dos respectivos valores esperados.

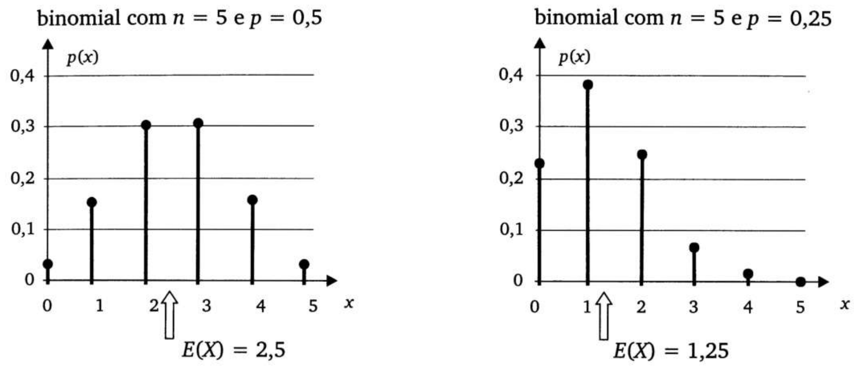


Figura 5.5 *Representações gráficas de distribuições binomiais.*

Distribuições binomiais com $p = 0,5$ são simétricas, mas são assimétricas quando $p \neq 0,5$. A assimetria aumenta à medida que p aproxima-se de zero (assimetria positiva) ou de um (assimetria negativa).

EXERCÍCIOS

7. Dados históricos mostram que 5% dos itens provindos de um fornecedor apresentam algum tipo de defeito. Considerando um lote com 20 itens, calcular a probabilidade de:
   a) haver algum item com defeito;
   b) haver exatamente dois itens defeituosos;
   c) haver mais de dois itens defeituosos;
   d) qual é o número esperado de itens defeituosos no lote?
   e) e de itens bons?
8. Apresente o gráfico da variável aleatória do Exemplo 5.2 sob a forma de um histograma, indique a posição do valor esperado e represente $P(X > 5)$ como uma área na figura.

5.2.3 Distribuição hipergeométrica

Considere o problema básico de inspeção por amostragem, em que observamos uma amostra de n itens de um lote com N itens, sendo r defeituosos. Avaliamos o número X de itens defeituosos na amostra. A variável aleatória X aparenta ser binomial, mas só é realmente binomial se:

- a seleção da amostra for *aleatória* (para garantir a mesma probabilidade p de sair item defeituoso em todos os ensaios);
- *com* reposição (para garantir *independência* entre os ensaios).

A segunda condição não costuma ser satisfeita na prática. Se a amostragem for *aleatória*, mas **sem** *reposição*, a distribuição de X é conhecida como *hipergeométrica* de parâmetros N, n e r (ver Figura 5.6).

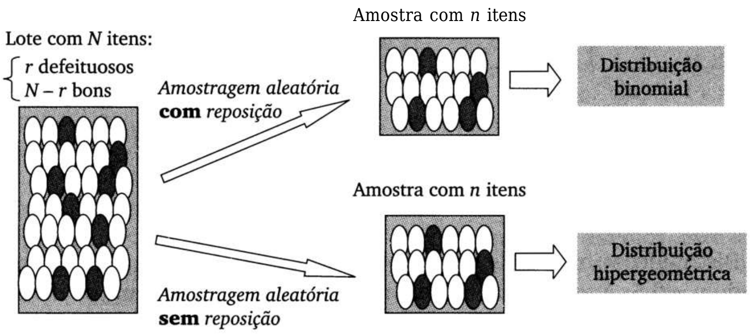


Figura 5.6 *Caso típico de inspeção por amostragem. Variável aleatória em estudo:* X = *número de defeituosos na amostra.*

A função de probabilidade de X é expressa por:

$$p(x) = \frac{\binom{r}{x} \cdot \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad [x = 0, 1, ..., min(r, n)] \tag{5.16}$$

com valor esperado e variância dados por:

$$E(X) = n.p \tag{5.17}$$

$$V(X) = n.p.(1-p) \cdot \frac{N-n}{N-1} \tag{5.18}$$

onde $p = \dfrac{r}{N}$

Exemplo 5.3 Placas de vídeo são expedidas em lotes de 30 unidades. Antes que a remessa seja aprovada, um inspetor escolhe aleatoriamente cinco placas do lote e as inspeciona. Se nenhuma das placas inspecionadas for defeituosa, o lote é aprovado. Se uma ou mais forem defeituosas, todo o lote é inspecionado. Supondo que haja três placas defeituosas no lote, qual é a probabilidade de que o controle da qualidade aponte para a inspeção total?

Seja X o número de placas defeituosas na amostra. Desejamos calcular:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

Usando o modelo hipergeométrico:

$$p(0) = \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{30-3}{5-0}}{\binom{30}{5}} = \frac{\binom{27}{5}}{\binom{30}{5}} = \frac{80.730}{142.506} = 0{,}5665$$

Logo, $P(X \geq 1) = 1 - 0{,}5665 = 0{,}4335$.

É importante ressaltar que quando N é muito maior do que n, a distribuição hipergeométrica pode ser aproximada pela binomial. Muitos autores prescrevem uma relação $^{n}/_{N} \leq 0{,}05$ para que seja possível fazer a aproximação.[4] Nesse caso, a binomial tem parâmetros n e $p = {}^{r}/_{N}$.

EXERCÍCIOS

9. Qual é a probabilidade do Exemplo 5.3, se a inspeção completa for feita somente quando forem encontradas mais do que uma placa defeituosa na amostra?

10. Calcule o valor esperado e a variância da variável aleatória definida no Exemplo 5.3.

5.2.4 Distribüição de Poisson

Considere as situações em que se avalia o número de ocorrências de um tipo de evento por unidade de tempo, de comprimento, de área, ou de volume. Por exemplo:

4 Observe que se N for muito maior que n, as retiradas, mesmo feitas *sem* reposição, não irão modificar em demasia as probabilidades de ocorrências de *sucessos* (e de *fracassos*), na seqüência de ensaios.

a) número de consultas a uma base de dados em um minuto;

b) número de pedidos a um servidor num intervalo de tempo;

c) número de erros de tipografia em um formulário;

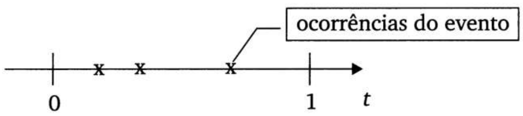
d) número de defeitos em um m^2 de piso cerâmico;

e) número de pulsações radioativas em um intervalo de tempo, na desintegração dos núcleos de uma substância radioativa.

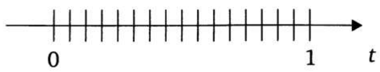
Suposições básicas:

- *independência* entre as ocorrências do evento considerado;
- os eventos ocorrem de forma *aleatória*, de tal forma que não haja tendência de aumentar ou reduzir as ocorrências do evento, no intervalo considerado.

Para desenvolvermos a distribuição de Poisson, consideremos a variável aleatória X = *número de consultas a uma base de dados em um minuto*. Ou seja, X é a contagem de ocorrências de consultas no intervalo de tempo [0, 1), como representado a seguir:



Considere o intervalo [0, 1) particionado em n subintervalos de amplitude $\Delta t = 1/n$;



Seja n suficientemente grande para que a probabilidade de ocorrer duas ou mais consultas, em cada subintervalo de amplitude At, seja desprezível, Assim, considere que em cada subintervalo só possa ocorrer 0 ou 1 consulta. Sendo p a probabilidade de ocorrer uma consulta em Δt, as probabilidades associadas a X podem ser calculadas, aproximadamente, pela binomial (Expressãc 5.13). Então,

$$p(x) = P(X = x) \approx \binom{n}{x} . p^x . (1 - p)^{n-x}, x = 0, 1, ..., n \qquad (5.19)$$

Mas quando $n \to \infty$ e $p \to 0$, de tal sorte que o valor esperado $E(X) = n.p \to \lambda$, sendo $\lambda > 0$, é possível mostrar que:

$$\binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ p\to 0 \\ np\to\lambda}]{} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \; x = 0, 1, 2, \ldots \qquad (5.20)$$

Então, sendo X a taxa média de consultas por unidade de tempo, as probabilidades de X podem ser calculadas pela chamada *distribuição de Poisson*, cuja função de probabilidade é dada por:

$$\boxed{p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \; x = 0, 1, 2, \ldots} \qquad (5.21)$$

sendo:

$$\boxed{E(X) = V(X) = \lambda} \qquad (5.22)$$

Exemplo 5.4 Supondo que as consultas num banco de dados ocorrem de forma independente e aleatória, com uma taxa média de três consultas por minuto, calculemos a probabilidade de que no próximo minuto ocorram menos do que três consultas.

Seja X o número de consultas por minuto. Então:

$$P(X < 3) = p(0) + p(1) + p(2) = \frac{e^{-3}3^0}{0!} + \frac{e^{-3}3^1}{1!} + \frac{e^{-3}3^2}{2!} = 0{,}4232$$

A Tabela 2 do apêndice apresenta as probabilidades acumuladas da Poisson, isto é:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{j=0}^{x} \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} \qquad (5.23)$$

No exemplo 5.5, usando a Tabela 2, temos:

$$P(X < 3) = P(X \le 2) = F(2) = 0{,}4232$$

Exemplo 5.4 (continuação) Calculemos a probabilidade de que nos próximos dois minutos ocorram mais do que 5 consultas.

Observe que a unidade de tempo alterou de um para dois minutos. Mas se a taxa média é de três ocorrências por minuto, então, em dois minutos, a taxa média é de seis ocorrências. Logo, no presente problema, $\lambda = 6$ e

$$P(X > 5) = 1 - P(X \le 5) = 1 - F(5) = 1 - 0{,}4457 = 0{,}5543$$

Aproximação da binomial pela Poisson

Justificamos a distribuição de Poisson a partir da binomial, fazendo $n \to \infty$ e $p \to 0$ (Expressão 5.20). Logo, em experimentos binomiais, quando n for muito grande e p for muito pequeno, podemos usar a distribuição de Poisson com:

$$\lambda = n.p \tag{5.24}$$

Observe que se n for grande (acima de 100, por exemplo) as combinações da binomial ficam difíceis de serem calculadas. Nesse caso, o uso da aproximação Poisson torna-se imprescindível.

Exemplo 5.5 Seja uma linha de produção em que a taxa de itens defeituosos é de 0,5%. Calculemos a probabilidade de ocorrer mais do que quatro defeituosos, em uma amostra de 500 itens.

$$\lambda = n.p = (500)\,.\,(0{,}005) = 2{,}5$$
$$P(X > 4) = 1 - P(X \le 4) = 1 - F(4) = 1 - 0{,}8912 = 0{,}1088$$

EXERCÍCIOS

11. Mensagens chegam a um servidor de acordo com uma distribuição de Poisson, com taxa média de cinco chegadas por minuto.

a) Qual é a probabilidade de que duas chegadas ocorram em um minuto?

b) Qual é a probabilidade de que uma chegada ocorra em 30 segundos?

12. Em um canal de comunicação digital, a probabilidade de se receber um *bit* com erro é de 0,0002. Se 10.000 *bits* forem transmitidos por esse canal, qual é a probabilidade de que mais de quatro *bits* sejam recebidos com erro?

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

13. Um armazém é abastecido mensalmente, sendo que a taxa média de abastecimento é 30 unidades/dia, com desvio padrão de 3 unidades/dia. A demanda média é de 25 unidades/dia, com desvio padrão de 4 unidades/dia. Suponha que o abastecimento e a demanda sejam independentes e, além disso, a demanda e o abastecimento num dia não alteram o abastecimento e a demanda nos dias seguintes. Qual é o valor esperado e o desvio padrão do excedente de produtos, no período de um mês?

14. Suponha que 10% dos clientes que compram a crédito em uma loja deixam de pagar regularmente suas contas (prestações). Se num particular dia, a loja vende a crédito para 10 pessoas, qual é a probabilidade de que mais de 20% delas deixem de pagar regularmente as contas? Suponha que as 10 pessoas que fizeram crediário nesse dia correspondam a uma amostra aleatória de clientes potenciais desta loja.

15. Em um sistema de transmissão de dados, existe uma probabilidade igual a 0,05 de um lote de dados ser transmitido erroneamente. Foram transmitidos 20 lotes de dados para a realização de um teste de análise da confiabilidade do sistema.

a) Qual é o modelo teórico mais adequado para esse caso? Por quê?

b) Calcule a probabilidade de haver erro na transmissão.

c) Calcule a probabilidade de que haja erro na transmissão em exatamente 2 dos 20 lotes de dados.

d) Qual é o número esperado de erros no teste realizado?

16. Numa fábrica, 3% dos artigos produzidos são defeituosos. O fabricante pretende vender 4000 peças e recebeu 2 propostas:

Proposta 1: o comprador A propõe examinar uma amostra de 80 peças. Se houver 3 ou menos defeituosas, ele paga 60 unidades monetárias (u.m.) por peça; caso contrário, ele paga 30 u.m. por peça.

Proposta 2: o comprador *B* propõe examinar 40 peças. Se todas forem perfeitas, ele está disposto a pagar 65 u.m. por peça; caso contrário, ele paga 20 u.m. por peça.

Qual é a melhor proposta? (Calcule o valor esperado da venda em cada proposta.)

17. O departamento de qualidade de uma empresa seleciona, aleatoriamente, alguns itens que chegam à empresa e submete-os a testes. Para avaliar um lote de transformadores de pequeno porte, o departamento de qualidade selecionou, aleatoriamente, 10 transformadores. Ele vai recomendar a aceitação do lote se não existir item defeituoso na amostra. Supondo que o processo produtivo desses transformadores gera um percentual de 3% de defeituosos, responda:

a) Qual é a probabilidade de que o lote venha a ser aceito?

b) Ao analisar 8 lotes de transformadores, com amostras aleatórias de 10 itens em cada lote, qual é a probabilidade de que, no máximo, um lote seja rejeitado?

18. Na comunicação entre servidores, uma mensagem é dividida em n pacotes, os quais são enviados em forma de códigos. Pelo histórico da rede, sabe-se que cada pacote tem uma pequena probabilidade, igual a 0,01, de não chegar corretamente a seu destino e, além disso, o fato de um pacote não chegar ao destino não altera a probabilidade dos demais chegarem corretamente. Um programa corretivo garante o envio correto da mensagem quando o número de pacotes enviados erroneamente não passar de 10% do total de pacotes da mensagem. Qual é a probabilidade de uma mensagem composta de 20 pacotes ser enviada corretamente? Responder usando:

a) a distribuição binomial;

b) a distribuição de Poisson.

19. Uma central telefônica recebe, em média, 300 chamadas na hora de maior movimento, e pode processar, no máximo, 10 ligações por minuto. Utilizando a distribuição de Poisson, calcular a probabilidade de que a capacidade da mesa seja ultrapassada em dado minuto do horário de pico.

20. Um piso cerâmico tem, em média, 0,01 defeito por m^2. Em uma área de 10 m x 10 m desse piso, calcule a probabilidade de ocorrer algum defeito.

21. Placas de circuito integrado são avaliadas após serem preenchidas com *chips* semicondutores. Considere que foi produzido um lote de 20 placas e selecionadas 5 para avaliação. Calcule a probabilidade de encontrar pelo menos uma placa defeituosa, supondo que o lote tenha 4 defeituosas e que tenha sido realizada:

a) uma amostragem aleatória com reposição;

b) uma amostragem aleatória sem reposição.

22. Suponha que o número de falhas em certo tipo de placa plástica tenha distribuição de Poisson, com taxa média de 0,05 defeito por m^2. Na construção de um barco, é necessário cobrir uma superfície de 3 m x 2 m com essa placa.

a) Qual é a probabilidade de que não haja falhas nessa superfície?

b) Qual é a probabilidade de que haja mais que uma falha nessa superfície?

c) Na construção de 5 barcos, qual é a probabilidade de que pelo menos 4 não apresentem defeito na superfície plástica?

23. Um item é vendido em lotes de 200 unidades. Normalmente o processo de fabricação gera 5% de itens defeituosos. Um comprador compra cada caixa por R$ 100,00 (alternativa 1). Um outro comprador faz a seguinte proposta: de cada lote, ele escolhe uma amostra de 15 peças; se a caixa tem 0 defeituoso, ele paga R$ 200,00; 1 defeituoso, ele paga R$ 50,00; mais que 1 defeituoso, ele paga R$ 5,00 (alternativa 2). Em média, qual alternativa é mais vantajosa para o fabricante? (Calcule os valores esperados das duas alternativas.)

24. Na produção de rolhas de cortiça, não é possível garantir qualidade homogênea, devido às variações internas nas placas de cortiça. Em função disso, um equipamento separa as rolhas que saem da linha de produção em duas categorias: A e B. Os dados históricos mostram que 40% são classificadas como A e 60% como B. O fabricante vende por R\$ 100,00 o milhar de rolhas da categoria A; e por R\$ 60,00 o milhar da categoria B.

Um comprador propõe comprar a produção diária da fábrica. Ele fará um plano de amostragem, extraindo 8 rolhas aleatoriamente. Se encontrar mais que 5 rolhas da categoria A, ele paga R\$ 200,00; caso contrário, ele paga R\$ 50,00. Pede-se:

a) Qual é a probabilidade do comprador encontrar mais que 5 rolhas da classe A?

b) Qual é o valor esperado da venda do fabricante, por milhar de rolhas vendidas, se ele aceitar a proposta do comprador? Em termos do valor esperado da venda, a proposta do comprador é mais vantajosa do que a venda separada por categoria?

c) Qual é a variância da venda do fabricante, por milhar de rolhas vendidas, se ele aceitar a proposta do comprador?

25. Suponha que as requisições a um sistema ocorram de forma independente e que a taxa média de ocorrências é três requisições por minuto, constante no período em estudo. Calcule a probabilidade de:

a) ocorrer mais que uma requisição no próximo minuto;

b) ocorrer mais que uma requisição no próximo minuto, sabendo-se que é certa a ocorrência de pelo menos uma (pois, você mesmo fará uma requisição no próximo minuto).