4

Probabilidade

No capítulo anterior, procuramos conhecer a variabilidade de algum processo com base em observações das variáveis pertinentes. Nestes três próximos capítulos, continuaremos a estudar os processos que envolvem variabilidade, aleatoriedade ou incerteza, mas procuraremos construir modelos matemáticos para facilitar a análise. Esses modelos normalmente são construídos a partir de suposições sobre o processo, mas podem também basear-se em dados observados no passado.

O leitor já deve ter ouvido falar de *probabilidade* ou de *modelos probabilísticos.* Há dois aspectos a considerar. O primeiro é que intuitivamente as pessoas procuram tomar decisões em função dos fatos que têm *maior probabilidade* de ocorrer. Veja os seguintes exemplos:

a) se o céu está nublado, então há chance considerável de chover. Deve-se levar um guarda-chuva ao sair de casa!;
b) se um inspetor de qualidade está observando as peças produzidas por uma máquina, e verifica que elas estão saindo fora do padrão, então ele pode deduzir que existe alta chance de essa máquina continuar produzindo peças fora do padrão. Logo, a máquina deverá receber atenção especial;
c) se em determinada família há muitos casos de doença cardíaca, então há maior chance de pessoas daquela família serem afetadas; portanto, os exames preventivos precisam ser feitos mais freqüentemente.

O segundo aspecto é a *incerteza* inerente às decisões que podem ser tomadas sobre determinado problema.

a) por mais nublado que o céu esteja, pode não chover, ao menos durante o período de tempo em que a pessoa estiver fora de casa;

b) algumas peças poderiam estar fora do padrão por motivos meramente casuais. O processo pode estar funcionando bem;

c) apesar dos vários precedentes familiares, uma pessoa pode viver a vida inteira sem ter problemas cardíacos.

Se for possível quantificar a incerteza associada a cada fato, algumas decisões tornam-se mais fáceis. Veja os casos a seguir:

a) Qual deve ser a capacidade instalada de uma usina hidrelétrica, em função da vazão e da precipitação pluviométrica?

b) Qual deve ser a capacidade do servidor de comércio eletrônico de uma empresa, em função da demanda prevista?

No caso (a), se for possível prever as variações na quantidade de chuva e, no caso (b), se houver previsão da demanda, podemos responder melhor às questões que foram colocadas. A teoria do cálculo de probabilidades permite obter uma quantificação da incerteza associada a um ou mais fatos e, portanto, é extremamente útil no auxílio à tomada de decisões.

Os modelos probabilísticos são aplicados em situações que envolvem algum tipo de *incerteza* ou *variabilidade*. Mais especificamente, consideraremos a presença de algum *experimento aleatório* como princípio para a construção de modelos probabilísticos.

Exemplo 4.1 São exemplos de experimentos aleatórios:

a) o lançamento de um dado e a observação da face voltada para cima; não sabemos exatamente qual face vai ocorrer, apenas que será uma das seis existentes. Além disso, se o dado for não viciado e o lançamento imparcial, todas as faces têm a mesma chance de ocorrer;

b) a observação dos diâmetros, em mm, de eixos produzidos em uma metalúrgica; sabemos que as medidas devem estar próximas de um valor nominal, mas não sabemos exatamente qual é o diâmetro de cada eixo antes de efetuar as mensurações;

c) o número de mensagens que são transmitidas corretamente por dia em uma rede de computadores; sabemos que o mínimo possível é zero, mas não sabemos nem sequer o número máximo de mensagens que serão transmitidas.

Nos casos em que os possíveis resultados de um experimento aleatório podem ser listados (caso discreto), um modelo probabilístico pode ser entendido como a listagem desses resultados, acompanhados de suas respectivas probabilidades. A Figura 4.1 ilustra as etapas para a construção de um modelo probabilístico.

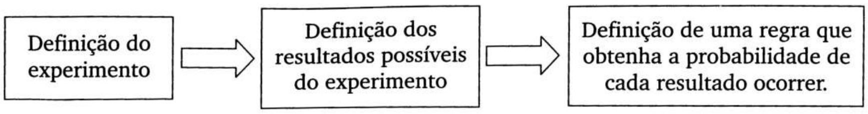


Figura 4.1 *Passos para a construção de um modelo probabilístico (caso discreto).*

4.1 ESPAÇO AMOSTRAL E EVENTOS

Seja um experimento aleatório qualquer.

O conjunto de *todos* os possíveis resultados do experimento é chamado de **espaço amostrai** e é denotado pela letra grega Ω.

Exemplo 4.2 Seguem alguns experimentos aleatórios com os respectivos espaços amostrais:

a) lançamento de um dado e observação da face voltada para cima:

b) retirada de uma carta de um baralho comum (52 cartas) e observação do naipe: Ω = {copas, espadas, ouros, paus};

c) o número de mensagens que são transmitidas corretamente por dia em uma rede de computadores: Ω = {0, 1, 2, 3, ..-};[1]

d) a observação do diâmetro, em mm, de um eixo produzido em uma metalúrgica: Ω = {d, tal que $d > 0$}.[2]

O espaço amostrai pode ser:

1. *finito,* formado por um número limitado de resultados possíveis, como nos casos (a) e (b);

2. *infinito enumerável,* formado por um número infinito de resultados, os quais podem ser listados, como no caso (c); ou

1 Note que não há um limite superior conhecido, mas somente é possível a ocorrência de valores inteiros.

2 Não há um limite superior e, teoricamente, pode haver uma infinidade de valores.

3. *infinito,* formado por intervalos de números reais, como no caso (d).

Um espaço amostral é dito discreto quando for finito ou infinito enumerável; é dito contínuo quando for infinito, formado por intervalos de números reais.

Os elementos para se tomar alguma decisão podem corresponder a um conjunto de resultados (ou *evento*) associados ao experimento aleatório. Por exemplo, se o diâmetro D de um eixo, em mm, que sai da linha de produção, pertencer ao conjunto (ou *evento)* $A = \{49,0 \leq D \leq 51,0\}$, então se decide que ele é adequado.

Chamamos de **evento** qualquer subconjunto do espaço amostral:
A é um evento $\Leftrightarrow A \subseteq \Omega$

Exemplo 4.3 Seja o experimento do lançamento de um dado. Temos: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. São exemplos de eventos:

A = *número par do dado* = $\{2, 4, 6\}$;

B = *número maior que 2 do dado* = $\{3, 4, 5, 6\}$;

C = *número 6* — $\{6\}$.

Dizemos que um evento ocorre quando um dos resultados que o compõem ocorre. Com respeito ao Exemplo 4.3, se o dado for lançado e ocorrer o número 4, então ocorrem os eventos A e B, mas não ocorre o evento C.

Como um evento é um subconjunto do espaço amostrai, então todos os conceitos da teoria de conjuntos podem ser aplicados a eventos. Considerando A e B eventos quaisquer, veja as principais operações na Figura 4.2.

Operação	Notação	Conjunto	Evento
a) união	$A \cup B$	reúne os elementos de ambos os conjuntos	ocorre quando ocorrer pelo menos um deles (A, B ou ambos)
b) interseção	$A \cap B$	formado somente pelos elementos que estão em A e B	ocorre quando ocorrer ambos os eventos (A e B)
c) complementar	$\overline{A}$	formado pelos elementos que não estão em A	ocorre quando não ocorrer o evento A (*não A*)

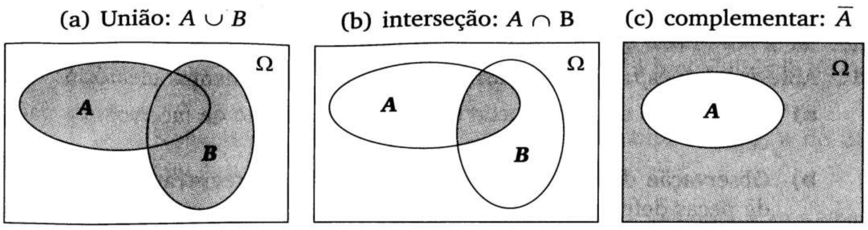


Figura 4.2 *Principais operações entre eventos e representações gráficas.*

Exemplo 4.3 (continuação). Sejam:

A = *número par do dado* = {2, 4, 6};

B = *número maior que 2 do dado* = {3, 4, 5, 6};

C = *número 6* = {6}.

Eventos complementares:

B' = *número menor ou igual a 2 do dado* = {1, 2};

C' = *não 6* = {1, 2, 3, 4, 5}.

Algumas uniões:

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$; $A \cup C = \{2, 4, 6\}$; $\bar{A} \cup A = \Omega$

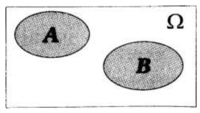
Algumas interseções:

$A \cap B = \{4, 6\}$; $A \cap C = \{6\}$; $\bar{A} \cap A = \{\} = 0$.

Eventos são ditos **mutuamente exclusivos** se e só se eles não puderem ocorrer simultaneamente. Então, para dois eventos quaisquer, A e B, temos:

A e B **são** *mutuamente exclusivos* <=> $A \cap B$ **= 0.**

No Exemplo 4.3, os eventos $\bar{A}$ = {1, 3, 5} e C = {6} são mutuamente exclusivos, pois eles não podem ocorrer simultaneamente (observe que $\bar{A} \cap C = 0$).



EXERCÍCIOS

1. Apresente os espaços amostrais dos seguintes experimentos aleatórios:
   a) Lançamento de uma moeda honesta e observação da face voltada para cima.
   b) Observação da qualidade de peças produzidas, registrando o número de peças defeituosas.
   c) Contagem do número de clientes numa fila única de banco, que chegam durante uma hora.
   d) Medição da velocidade do vento, em km/h, na pista de um aeroporto.
   e) Medição da temperatura, em graus Celsius, numa estação meteorológica da cidade de Florianópolis.

2. Considere que você vai cronometrar o tempo, em segundos, para carregar uma página da *web*.
   a) Represente, em forma de conjuntos, os seguintes eventos:
   A = *mais do que 5 e, no máximo*$_y$ *10 segundos;*
   B = *mais do que 10 segundos;*
   C = *mais do que 8 segundos;*
   $D = A \cup B$; $E = A \cap B$, $F = A \cap C$, $G = \overline{A}$
   b) Represente geometricamente (como intervalos na reta dos reais) os conjuntos do item anterior.

4.2 DEFINIÇÕES DE PROBABILIDADE

Intuitivamente, as pessoas sabem como calcular algumas probabilidades para tomar decisões. Observe os seguintes exemplos.

Exemplo 4.4

a) Vamos supor que você fez uma aposta com um amigo. O vencedor será aquele que acertar a face que ficar para cima, no lançamento de uma moeda *honesta*.[3] Qual é a probabilidade de você ganhar?

Intuitivamente, você responderia que a probabilidade de ganhar é igual a 50% (ou $^1/_2$).

3 Usaremos a expressão *moeda honesta* para referenciar uma moeda perfeitamente equilibrada e lançamentos imparciais. De forma análoga, usaremos o adjetivo *honesto* para dado, baralho etc.

b) Você continua apostando com o mesmo amigo. O vencedor será aquele que acertar o naipe de uma carta que será retirada, ao acaso, de um baralho comum de 52 cartas. Qual é a probabilidade de você ganhar?

Novamente, de forma intuitiva, você responderia que é de 25% (ou $^1/_4$).

O que há em comum entre as situações (a) e (b) do Exemplo 4.4? Refletindo um pouco, você observará que em ambas as situações temos experimentos aleatórios. A cada realização do experimento *apenas* um dos resultados possíveis pode ocorrer. Além disso, como se supõe que a moeda e o baralho são *honestos*, cada um dos resultados possíveis tem a *mesma* probabilidade de ocorrer.

4.2.1 Definição clássica de probabilidade

Se um experimento aleatório tem n resultados *igualmente prováveis,* e n_A desses resultados pertencem a certo evento A, então a probabilidade de ocorrência do evento A será:

$$\boxed{P(A) = \frac{n_A}{n}} \qquad (4.1)$$

Exemplo 4.4 (continuação)

a) No caso da moeda, há apenas dois resultados possíveis e igualmente prováveis, resultando que a probabilidade de ocorrência de uma das faces será igual a $^1/_2$ (ou 50%).

b) No caso dos naipes do baralho, há quatro resultados possíveis e igualmente prováveis, resultando que a probabilidade de ocorrência de um deles será igual a $^1/_4$ (ou 25%). Analogamente, podemos considerar cada carta do baralho como um resultado. Nesse caso, a probabilidade de ocorrer certo naipe é de $^{13}/_{52}$ = $^1/_4$.

4.2.2 Definição experimental de probabilidade

Muitas vezes, a alocação de probabilidades baseia-se em observações do passado. Seja um experimento aleatório com espaço amostrai Ω e um evento A de interesse. Suponha que esse experimento seja repetido n vezes e o evento A ocorreu n(A) vezes. A freqüência relativa do evento A é dada por:

$$f(A) = \frac{n(A)}{n} \tag{4.2}$$

À medida que o experimento é repetido mais e mais vezes, sob as mesmas condições, a freqüência relativa do evento *A* tenderá a ficar cada vez mais próxima da probabilidade de ocorrência do evento A. Mais especificamente:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n} \tag{4.3}$$

Exemplo 4.5 Um fabricante de lâmpadas fluorescentes precisa especificar o tempo de garantia de um de seus modelos. Embora os projetistas estimem que o tempo médio de vida do modelo seja de 5.000 horas, não se sabe exatamente como as lâmpadas irão comportar-se. E sem esse conhecimento seria temerário especificar o tempo de garantia.

Ao definir o experimento aleatório como ligar a lâmpada e registrar o tempo (em horas) que ela funciona, o espaço amostrai é formado pelo conjunto de todos os valores maiores ou iguais a zero, ou seja:

Ω =

Seja o evento:

A_t = *a lâmpada funcionar até o tempo t*

Podemos repetir o experimento com um número *n* suficientemente grande de lâmpadas.[4] Com os resultados do experimento, podemos calcular as freqüências relativas:

$$f(A_t) = \frac{n(A_t)}{n} \tag{4.4}$$

para diversos valores de t. Essas freqüências relativas podem ser usadas como valores aproximados das probabilidades $P(A_t)$ e, assim, definir adequadamente o tempo de garantia, de tal forma que ele não seja demasiadamente longo, pois aí seria necessário repor muitas lâmpadas (custo financeiro alto), mas também não seja muito curto, o que pode gerar a suspeita de um produto com baixa qualidade, acarretando perda de mercado.

Em muitas situações, é impossível realizar o experimento diversas vezes. Veja o exemplo seguinte.

Exemplo 4.6 Quando estudamos o regime de vazões de um rio, com o objetivo de avaliar a viabilidade da construção de uma usina hidrelétrica, não é possível replicarmos os diversos meses e anos, fenômenos climáticos e eventual in-

4 Há métodos estatísticos para calcular n (tamanho da amostra), conforme será visto no Capítulo 7.

tervenção humana. Nesse caso, é bastante comum a utilização de dados históricos.[5] Supondo que as condições atuais e futuras sejam razoavelmente semelhantes àquelas nas quais os dados foram obtidos, podemos ter uma idéia sobre as probabilidades dos eventos de interesse através das freqüências relativas dos dados históricos.

4.2.3 Axiomas e propriedades da probabilidade

Independentemente de como são obtidas, usando a definição clássica ou a experimental, as probabilidades atendem a alguns *axiomas.* Formalmente, seja um experimento aleatório e um espaço amostrai Ω associado a ele. A cada evento E_i $(i = 1,2,\ldots)$ associaremos um número real denominado *probabilidade de ocorrência de* E_i $P(E_i)$, que deve satisfazer aos seguintes axiomas:

a) $0 \leq P(E_i) \leq 1$

b) $P(\Omega) = 1$ e

c) Se $E_1, E_2, \ldots, E_n$ são eventos mutuamente exclusivos, então $P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n)$.

O axioma (a) afirma que uma probabilidade é sempre um número entre 0 e 1. O axioma (b) afirma que, ao realizar o experimento, sempre vai ocorrer algum dos resultados possíveis, razão pela qual o espaço amostrai é chamado de *evento certo.* Já o axioma (c) é menos intuitivo. Ele afirma que, ao unir eventos formados por resultados diferentes, a probabilidade de ocorrer essa união é dada pela soma das probabilidades de cada evento.

Para ilustrar os axiomas, retomemos o experimento de lançar um dado e observar o lado voltado para cima. Temos $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ao realizar o experimento, certamente vai ocorrer algum elemento de Ω; logo, $P(\Omega) = 1$. Vamos considerar, por exemplo, os eventos associados a cada resultado, isto é, $E_i = i$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$. Se for suposto que o dado é perfeitamente equilibrado e os lançamentos imparciais (dado honesto), podemos atribuir, pela definição clássica, as seguintes probabilidades: $P(E_i) = {}^1/_6$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$. Note que esses eventos são mutuamente exclusivos ($E_i \cap E_j = \phi$, $\forall i \neq j$) e a probabilidade da união de quaisquer desses eventos é dada pela soma das probabilidades de cada um. Por exemplo, pela definição clássica, Expressão 4.1, temos:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P\left(\{1,\ 2,\ 3\}\right) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

O mesmo valor pode ser obtido pelo axioma (c):

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Seguem algumas propriedades básicas da probabilidade:

1. P(0) = 0

   Se o experimento é realizado, algum resultado certamente vai ocorrer (P(Ω) = 1). Portanto, Ø nunca ocorre (P(Ø) = 0). Ø é conhecido como *evento impossível.*

2. Para o caso discreto, isto é, quando os resultados possíveis podem ser listados, então, pelo axioma (c), a probabilidade de qualquer evento pode ser obtida pela soma das probabilidades dos resultados individuais, ou seja, se $A \subseteq \Omega = \{\omega_{l9}\ \omega_2, \omega_3, \ldots\}$, então:

$$\boxed{P(A) = \sum_{i:\, \omega_i \in A} P(\omega_i)} \qquad (4.5)$$

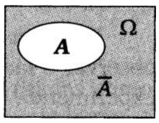
   No experimento do dado, por exemplo:

$$P(\textit{número par}) = P(\{2, 4, 6\}) = P(2) + P(4) + P(6) = {}^3\!/_6 = {}^1\!/_2$$

   Observe que esse processo de calcular probabilidades pode ser usado mesmo quando o espaço amostrai não for eqüiprovável.

3. **Sejam $A \subseteq \Omega$ e $\bar{A}$ o evento complementar de A, então:**

$$\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)} \qquad (4.6)$$

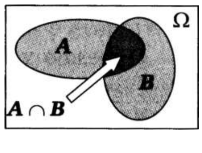


   Note que, ao unir A e *A'* temos o espaço amostrai *Ω,* que tem probabilidade igual a 1. Pelo axioma (c), temos a expressão do evento complementar.

   No experimento do dado, temos, por exemplo, *P(ocorrer seis)* = P({6}) = $^1/_6$. Pela propriedade do evento complementar: P(não *ocorrer seis)* = *1* - $^1/_6$ = $^5/_6$.

4. (*Regra da soma das probabilidades*). Sejam *A* e *B* eventos quaisquer, então:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \qquad (4.7)$$



   Note, pelo esquema ao lado, que, ao somar P(A) e P(B), estamos contando duas vezes os pontos do conjunto $A \cap B$. Logo, ao calcular $P(A \cup B)$, é necessário excluir uma vez $P(A \cap B)$.

No experimento do dado, sejam: $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Portanto, $P(A) = {}^1/_2$, $P(B) = {}^2/_3$ e $P(A \cap B) = P(\{4, 6\}) = {}^1/_3$. A probabilidade de ocorrer um número maior do que 1 pode ser calculada por $P(A \cup B) = {}^1/_2 + {}^2/_3 - {}^1{}_3 = {}^5/_6$. Note que é o mesmo valor que obteríamos se calculássemos diretamente por (4.1).

EXERCÍCIOS

3. Retira-se, ao acaso, uma carta de um baralho de 52 cartas. Calcule a probabilidade de:

a) a carta não ser de ouros;

b) ser uma carta de ouros ou uma figura.

4. Depois de um longo período de testes, verificou-se que o procedimento *A* de recuperação de informação corre um risco de 2% de não oferecer resposta satisfatória. No procedimento *B,* o risco cai para 1%. O risco de ambos os procedimentos apresentarem resposta insatisfatória é de 0,5%. Qual é a probabilidade de pelo menos um dos procedimentos apresentar resposta insatisfatória?

5. De um conjunto de cinco empresas, deseja-se selecionar, aleatoriamente, uma empresa, mas com probabilidade proporcional ao número de funcionários. O número de funcionários da Empresa A é 20; de *B* é 15; de C é 7; de *D* é 5 e de *E* é 3.

a) Qual é a probabilidade de cada uma das empresas ser a selecionada?

b) Qual é a probabilidade de a Empresa A não ser selecionada?

6. Considere que a probabilidade de ocorrer *k* defeitos ortográficos em uma página de jornal é dada por:

$$p(k) = \frac{1}{e \cdot k!} \quad (e \approx 2{,}7183)$$

Tomando-se uma página qualquer, calcule a probabilidade de:

a) não ocorrer erro;

b) ocorrer mais do que dois erros.

7. Mostre que:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

4.3 PROBABILIDADE CONDICIONAL E INDEPENDÊNCIA

Muitas vezes, há interesse em calcular a probabilidade de ocorrência de um evento *A,* dada a ocorrência de um evento *B.* Exemplos:

- Qual é a probabilidade de chover amanhã em Florianópolis, sabendo que choveu hoje?
- Qual é a probabilidade de um dispositivo eletrônico funcionar sem problemas por 200 horas consecutivas, sabendo que ele já funcionou por 100 horas?
- Qual é a probabilidade de que um dos três servidores de correio eletrônico fique congestionado, sabendo que um deles está inoperante?

Em outras palavras, queremos calcular a probabilidade de ocorrência de *A* *condicionada* à ocorrência prévia de *B.* Essa probabilidade é representada por $P(A|B)$ (lê-se *probabilidade de A dado B).*

Exemplo 4.7 Os dados, a seguir, representam o sumário de um dia de observação em um posto de qualidade, em que se avalia o peso dos pacotes de leite produzidos num laticínio.

Condição do peso	**Tipo do leite**			
	B (B)	**C CC)**	**UHT (U)**	**Total**
Dentro das especificações (D)	500	4.500	1.500	6.500
Fora das especificações (F)	30	270	50	350
Total	530	4.770	1.550	6.850

Retira-se, ao acaso, um pacote de leite da população de 6.850 unidades. Sejam *D* e *F* os eventos que representam se o pacote retirado está dentro ou fora das especificações, respectivamente. Da mesma forma, *B, C eU* são eventos que representam o tipo do leite. Pergunta-se:

a) Qual é a probabilidade de o pacote de leite estar fora das especificações?

Resp.: Como o espaço amostrai é composto de 6.850 unidades, sendo que 350 satisfazem ao evento, então:

$$P(F) = \frac{350}{6.850} = 0{,}051$$

b) Qual a probabilidade de o pacote de leite retirado estar fora das especificações, sabendo-se que é do tipo UHT?

Resp.: Nesse caso, o espaço amostrai ficou restrito às 1.550 unidades de leite UHT. Destas, 50 satisfazem ao evento. Então:

$$P(F|U) = \frac{50}{1.550} = 0{,}032$$

Note que, se o numerador e o denominador de $P(F|U)$ forem divididos pelo número total de unidades, temos:

$$P(F|U) = \frac{50}{1.550} = \frac{50/6.850}{1.550/6.850} = \frac{P(F \cap U)}{P(U)}$$

que é a relação usada na definição formal de probabilidade condicional.

Sejam A e *B* eventos quaisquer, sendo P(B) > 0. Definimos a *probabilidade condicional de A dado B* por:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} \tag{4.8}$$

Note que no denominador temos a probabilidade do evento que supostamente aconteceu, mas calculada nas condições originais do experimento.

Se houver interesse no oposto, isto é, na probabilidade de ocorrência de *B* condicionada à ocorrência prévia de *A,* sendo P(A) > 0, temos:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \tag{4.9}$$

É importante ressaltar que a operação de intersecção é *comutativa,* implicando $P(A \cap B) = P(B \cap A)$.

Exemplo 4.8 Seja o lançamento de 2 dados não viciados e a observação das faces voltadas para cima. Suponha que haja interesse nas probabilidades dos seguintes eventos:

a) Faces iguais, sabendo que a soma é menor ou igual a 5.

b) Soma das faces menor ou igual a 5, sabendo que as faces são iguais.

Inicialmente, vamos explicitar o espaço amostrai desse experimento, que é formado por todas as 6 x 6 = 36 possíveis combinações de resultados dos dois dados, ou seja:

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

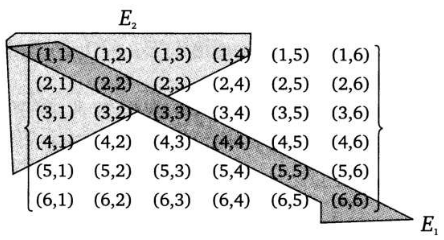
Considere os eventos:

E1 = *faces iguais* = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)} e

E_2 = *soma das faces é menor ou igual a 5* =

= {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)}.

Portanto, $E_1 \cap E_2$ = {(1,1), (2,2)}. Esquematicamente:



Calculando

a) A probabilidade de as faces serem iguais, sabendo que a soma é menor ou igual a 5. Ou seja:

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{2/36}{10/36} = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

Note que, se o espaço amostrai for restringido ao evento conhecido, E_2, temos 10 resultados possíveis, sendo que 2 satisfazem também ao evento de interesse, E_{l1}, *o* que torna natural a probabilidade condicional ser $^2/_{10}$.

b) A probabilidade de a soma das faces ser menor ou igual a 5, sabendo que as faces são iguais. Ou seja:

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{2/36}{6/36} = \frac{2}{6} = 0{,}333\ldots$$

4.3.1 A regra do produto

Uma das conseqüências da expressão da probabilidade condicional (4.8) é a *regra do produto,* obtida ao isolar a probabilidade da interseção. Ou seja:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(B)\ .\ P(A|B)} \qquad (4.10)$$

que fornece uma fórmula de calcular a probabilidade de ambos os eventos (A e *B*) ocorrerem. Em (4.10), o evento condicionado é *B,* mas o inverso também é possível, pois

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(A)\ .\ \mathrm{P}(B|A)} \qquad \mathbf{(4.11)}$$

Para três eventos, *A, B e C,* a *regra do produto* pode ser escrita como

$$\boxed{P(A \cap B \cap C) = P(A)\ .\ P(B|A)\ .\ P(C|A \cap B)} \qquad \mathbf{(4.12)}$$

É importante que seja observada a seqüência lógica dos eventos para montar as expressões precedentes.

Exemplo 4.9. Uma caixa contém **4** cartões amarelos e 8 vermelhos. Retiramos, ao acaso, 2 cartões, um após o outro, sem reposição, e observamos as cores dos dois cartões.

a) Qual é a probabilidade de que ambos sejam amarelos?

Chamando de A_i o evento que representa cartão amarelo na i-ésima extração e V_i o evento que representa cartão vermelho *na* i-ésima extração (i = 1, 2), temos o seguinte espaço amostrai:

$$\Omega = \{(A_1, A_2),\ (A_1, V_2),\ (V_1, A_2),\ (V_1, V_2)\}$$

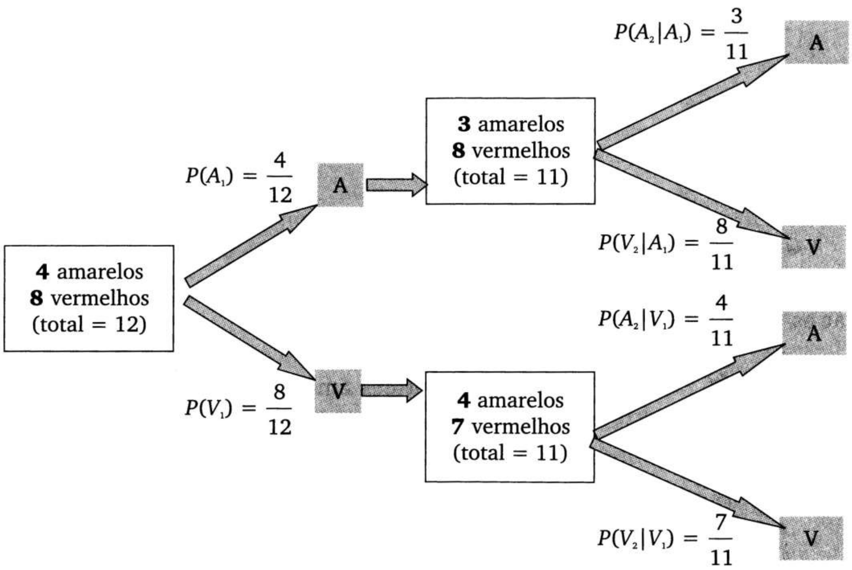
A probabilidade de interesse é $P\{(A_l\ \ A_2)\}$, que também pode ser colocada em termos de interseção: $P(A_1 \cap A_2)$, isto é, a probabilidade de ocorrer amarelo na primeira extração *e* amarelo na segunda extração. Para a aplicação da *regra do produto,* $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\ .\ P(A_2|A_1)$, calculamos:

$P(A_1) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ (pois existem 4 amarelos dentre os 12 cartões) e

$P(A_2|A_1) = \frac{3}{11}$ (pois, supondo que tenha sido extraído cartão amarelo na primeira extração, restaram 3 amarelos dentre 11 cartões). Logo, $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{11} = \frac{1}{11}$.

b) Como alocar probabilidades a todos os elementos do espaço amostrai?

Nesse caso, podemos construir uma árvore, indicando todas as situações possíveis *(árvore de probabilidades*). Veja a Figura 4.3.



1- extração **2- extração**

Figura 4.3 *Árvore de probabilidades - retiradas sem reposição (A = amarelo; V = vermelho).*

Com base na Figura 4.1, podemos calcular as probabilidades de todos os resultados do espaço amostrai, como segue:

$$P\{(A_1, A_2)\} = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{1}{11}$$

$$P\{(A_1, V_2)\} = P(A_1 \cap V_2) = P(A_1) \cdot P(V_2|A_1) = \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} = \frac{8}{33}$$

$$P\{(V_1, A_2)\} = P(V_1 \cap A_2) = P(V_1) \cdot P(A_2|V_1) = \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{8}{33}$$

$$P\{(V_1, V_2)\} = P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \cdot P(V_2|V_1) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{33}$$

Observe que a soma dos quatro resultados possíveis é igual a 1 (axioma (b) da probabilidade).

c) Qual é a probabilidade de ocorrer exatamente 1 cartão amarelo?

Queremos a probabilidade de ocorrer (A_1, V_2) ou (V_1, A_2). Em termos da linguagem de conjuntos, queremos a união dos dois resultados (eventos). Como esses eventos são mutuamente exclusivos (não podem ocorrer simultaneamente), então a probabilidade é dada pela soma, ou seja:

$$P\{(A_1, V_2) \cup (V_1, A_2)\} = P(A_1, V_2) + P(V_1, A_2) = \frac{8}{33} + \frac{8}{33} = \frac{16}{33}$$

d) Considere a retirada de 3 cartões. Qual é a probabilidade de que os dois primeiros sejam vermelhos e o terceiro seja amarelo?

Desejamos calcular

$$P(V_1 \cap V_2 \cap A_3) = P(V_1) \cdot P(V_2|V_1) \cdot P(A_3|V_1 \cap V_2)$$

Os dois primeiros fatores já foram calculados anteriormente. Para calcular $P(A_3|V_1 \cap V_2)$ basta considerar a caixa com 2 cartões vermelhos a menos, ou seja, com 4 amarelos e 6 vermelhos. Assim:

$$P(A_3|V_1 \cap V_2) = \frac{4}{10}$$

Logo:

$$P(V_1 \cap V_2 \cap A_3) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{28}{165}$$

4.3.2 Eventos independentes

O Exemplo 4.10 é parecido com o exemplo anterior, mas com a amostragem feita *com reposição*. Verifique que os cálculos tornam-se mais simples, pois a configuração da urna não se altera na segunda extração.

Exemplo 4.10 Uma caixa contém 4 cartões amarelos e 8 vermelhos. Retiram-se, ao acaso, 2 cartões da caixa, um após o outro, sendo que o primeiro cartão é reposto antes da retirada do segundo (*amostragem com reposição*), e observa-se a cor dos dois cartões.

A Figura 4.4 apresenta a árvore de probabilidades desse experimento.

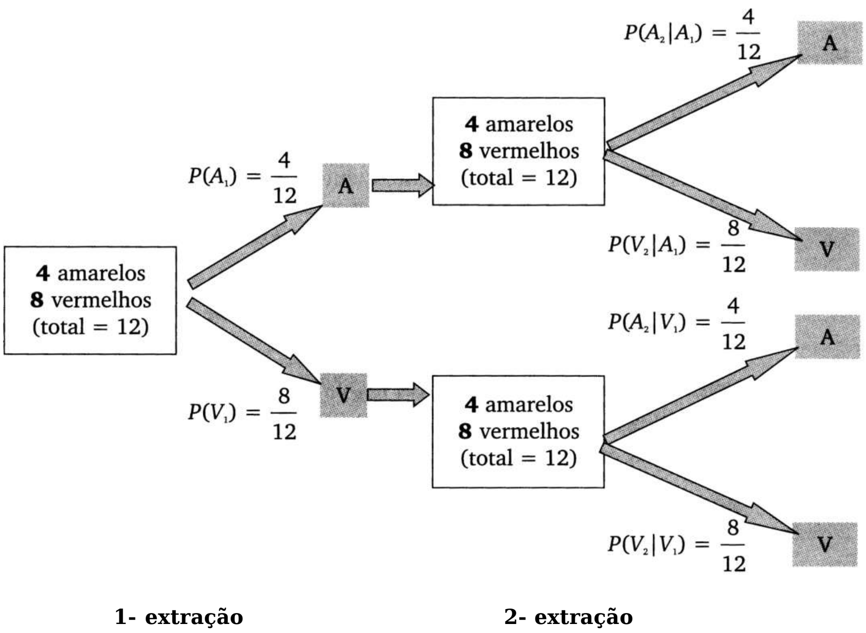


Figura 4.4 *Árvore de probabilidades - retiradas com reposição (A = amarelo; V = vermelho).*

Note que nessa situação, $P(A_2|A_1) = P(A_2|V_1) = {}^4/_{12}$, ou seja, não importa se saiu cartão amarelo ou vermelho na primeira extração, a probabilidade de sair amarelo na segunda extração é de ${}^4/_{12}$ - há *independência* entre os eventos. Assim, basta escrever $P(A_2)$, sem condicionante.

Dois ou mais eventos são **independentes** quando a ocorrência de um dos eventos não influencia a probabilidade da ocorrência dos outros.

Se dois eventos *A e B* são independentes, então:

$$P(A|B) = P(A) \text{ e} \quad (4.13)$$

$$P(B|A) = P(B) \quad (4.14)$$

Como conseqüência de (4.14), a *regra do produto* pode ser simplificada da seguinte forma:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B) \qquad (4.15)$$

Essa relação é usada para definir formalmente eventos independentes, ou seja:

$$\boxed{A \text{ e } B \text{ são independentes} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

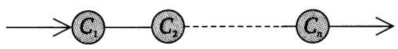
A definição de independência ainda pode ser ampliada para mais eventos, como segue:

$$\boxed{E_1, E_2 \ldots E_n \text{ são independentes} \Leftrightarrow P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) = P(E_1) \cdot P(E_2) \ldots P(E_n)}$$

Embora a implicação seja dos dois lados, normalmente as condições do experimento permitem verificar se é razoável supor independência entre os eventos e, em caso afirmativo, o cálculo da probabilidade da interseção pode ser fatorado nas probabilidades dos eventos independentes.

Quando a população for bastante grande em relação ao tamanho da amostra, mesmo que a amostragem seja feita *sem* reposição, podemos supor independência. Imagine que no experimento do Exemplo 4.9 haja 4.000 cartões amarelos e 8.000 vermelhos. Ao extrair dois cartões, a probabilidade de sair amarelo na segunda extração é de aproximadamente $^4/_{12}$, independentemente de ter saído amarelo ou vermelho na primeira extração.

Exemplo 4.11. Considere um sistema composto de n componentes ligados em série, de tal forma que, se um componente falhar, o sistema todo falha. Esquematicamente:



Se os componentes operam *independentemente* e cada um tem probabilidade p de falhar, qual é a probabilidade de o sistema funcionar?

Resp.: $(1 - p)^n$ (verifique o porquê; use a regra do produto para eventos independentes).

EXERCÍCIOS

8. Para testar se um sistema especialista responde satisfatoriamente a um usuário, foram feitas cinco perguntas, cada uma com quatro alternativas de resposta. Se o sistema escolhe as alternativas aleatoriamente, qual é a probabilidade de ele responder corretamente a todas as cinco perguntas?

9. Com respeito ao Exemplo 4.7, calcule:

$P(D)$; $P(B)$; $P(D \cap B)$; $P(D|B)$; $P(B|D)$.

4.4 TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL

Exemplo 4.12. Imagine que você utiliza peças de quatro fornecedores, que têm diferentes desempenhos quanto a sua qualidade. As peças são classificadas como *conformes* ou *não conformes* e você conhece a proporção de peças *não conformes* de cada fornecedor (p_1 ,p_2, p_3 e p_4). Considere a formação de um lote com peças dos quatro fornecedores, conforme ilustra a Figura 4.5. Se você selecionar, ao acaso, uma das peças do lote, qual é a probabilidade de ela ser *não conforme?*

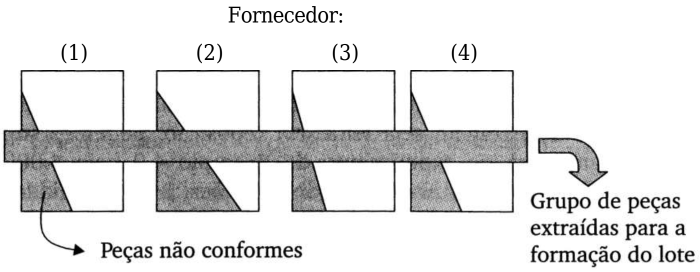


Figura 4.5 *Ilustração da formação de um lote de peças provindas de quatro fornecedores.*

A resposta seria simples se você soubesse de qual fornecedor é a peça selecionada, mas você não sabe. O chamado *teorema da probabilidade total* permite solucionar esse problema.

Considere o espaço amostrai particionado em k eventos, E_1 ,E_2, E_k, satisfazendo às seguintes condições:

a) $E_i \cap E_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$ (eventos *mutuamente exclusivos*);

b) $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_k = \Omega$ (eventos *exaustivos*) e

c) $P(E_i) > 0$ para $i = 1, 2, ..., n$. Veja a Figura 4.6.

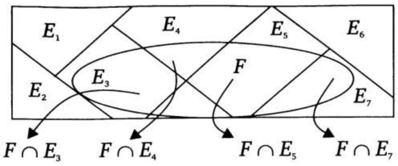


Figura 4.6 *Partição do espaço amostrai em eventos mutuamente exclusivos.*

Seja um evento F qualquer, referente ao espaço amostrai Ω. Então:

$$F = (F \cap E_1) \cup (F \cap E_2) \cup ... \cup (F \cap E_k)$$

onde os eventos $(F \cap E_i)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ são mutuamente exclusivos entre si. Logo:

$$P(F) = P[(F \cap E_1) \cup (F \cap E_2) \cup ... \cup (F \cap E_k)] =$$
$$= P(F \cap E_1) + P(F \cap E_2) + ... + P(F \cap E_k)$$

Usando a *regra do produto,* temos a seguinte equação, conhecida como o *teorema da probabilidade total:*

$$\mathrm{P}(F) = P(E_1) \cdot P(F|E_1) + P(E_2) \cdot P(F|E_2) + ... + P(E_k) \cdot P(F|E_k)$$

ou

$$\boxed{P(F) = \sum_{i=1}^{k} P(E_i) \cdot P(F|E_i)} \qquad \textbf{(4.16)}$$

Naturalmente, algumas $P(F|E_i)$ poderão assumir valor zero por não haver interseção entre F e E_t. O teorema da probabilidade total pode ser interpretado fisicamente como uma medida do peso de cada um dos eventos E_b na contribuição para formar o evento F.

Exemplo 4.12 (continuação) Os eventos E_t representam as procedências das peças (fornecedores 1, 2, 3 e 4), e o evento F representa *peça não conforme.* Repare que os eventos E_t (fornecedores) são mutuamente exclusivos, pois a peça somente pode ser originária de um dos fornecedores; e que o evento F tem interseção com cada um deles (uma vez que todos os fornecedores produzem peças *não conformes).*

Suponha a mesma probabilidade para todos os fornecedores, isto é,

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = 0,25$$

e as probabilidades de não-conformidade para cada fornecedor sejam:

$$p_1 = P(F \mid E_1) = 0{,}1; \quad p_2 = P(F \mid E_2) = 0{,}1; \quad p_3 = P(F \mid E_3) = 0{,}2;$$
$$p_4 = P(F \mid E_4) = 0{,}4$$

Então, usando (4.16), a probabilidade de *não conforme* é dada por:

$$P(F) = (0{,}25)(0{,}1) + (0{,}25)(0{,}1) + (0{,}25)(0{,}2) + (0{,}25)(0{,}4) = 0{,}20.$$

4.5 TEOREMA DE BAYES

O teorema de Bayes está intimamente relacionado ao teorema da probabilidade total. Supõem-se as mesmas condições (eventos E_t mutuamente exclusivos e exaustivos e um evento F qualquer). Basicamente, o teorema de Bayes permite obter a probabilidade de que um dos eventos E_t ocorra, sabendo-se que o evento F ocorreu. Para o caso das peças dos quatro fornecedores, o Teorema de Bayes permite responder a questões do tipo: "sabendo-se que a peça é *não conforme,* qual é a probabilidade de que tenha vindo do fornecedor 4?"

De maneira geral, usando a expressão (4.8), temos:

$$P(E_i|F) = \frac{P(E_i \cap F)}{P(F)}$$

Usando a regra do produto (4.10), podemos escrever o chamado *Teorema de Bayes:*

$$\boxed{P(E_i|F) = \frac{P(E_i) \cdot P(F|E_i)}{P(F)}} \qquad (4.17)$$

onde P(F) é calculado por (4.16).

Exemplo 4.12 (continuação) Sabendo-se que a peça é não conforme, qual é a probabilidade de que ela tenha vindo do fornecedor 4?

Lembrando que já calculamos *P(F) = 0,20,* então, aplicando (4.17), temos:

$$P(E_4|F) = \frac{P(E_4) \cdot P(F|E_4)}{P(F)} = \frac{(0{,}25)(0{,}40)}{0{,}20} = 0{,}50$$

EXERCÍCIOS

10. Uma caixa contém três cartões verdes, quatro amarelos, cinco azuis e três vermelhos. Dois cartões são retirados da caixa, ao acaso, um após o outro, sem reposição. Anotam-se suas cores. Calcular a probabilidade de que:

a) os dois cartões sejam da mesma cor;

b) os dois cartões sejam verdes, sabendo-se que são da mesma cor.

11. Uma rede local de computadores é composta por um servidor e cinco clientes (A, B, C, D e E). Registros anteriores indicam que dos pedidos de determinado tipo de processamento, realizados através de uma consulta, cerca de 10% vêm do cliente A, 15% do B, 15% do C, 40% do D e 20% do E. Se o pedido não for feito de forma adequada, o processamento apresentará erro. Usualmente, ocorrem os seguintes percentuais de pedidos inadequados: 1% do cliente A, 2% do cliente B, 0,5% do cliente C, 2% do cliente D e 8% do cliente E.

a) Qual é a probabilidade de o sistema apresentar erro?

b) Qual é a probabilidade de que o processo tenha sido pedido pelo cliente E, sabendo-se que apresentou erro?

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

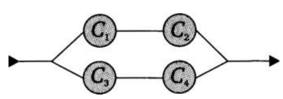
12. A probabilidade de que Joãozinho resolva este problema é 0,5. A probabilidade de que Mariazinha resolva este problema é 0,7. Qual é a probabilidade de o problema ser resolvido se ambos tentarem independentemente?

13. Um sistema tem dois componentes que operam independentemente. Suponha que as probabilidades de falha dos componentes 1 e 2 sejam 0,1 e 0,2, respectivamente. Determinar a probabilidade de o sistema funcionar nos dois casos seguintes:

a) os componentes são ligados em série (isto é, ambos devem funcionar para que o sistema funcione);

b) os componentes são ligados em paralelo (isto é, basta um funcionar para que o sistema funcione).

14. Um sistema tem quatro componentes que operam independentemente, sendo que cada componente tem probabilidade 0,1 de não funcionar. O sistema é ligado da seguinte forma:



Determinar a probabilidade de o sistema funcionar.

15. De acordo com certa tábua de mortalidade, a probabilidade de José estar vivo daqui a 20 anos é de 0,6, e a mesma probabilidade para Manuel é de 0,9. Determinar:

a) P (ambos estarem vivos daqui a 20 anos);

b) P (nenhum estar vivo daqui a 20 anos);

c) P (um estar vivo e outro estar morto daqui a 20 anos).

16. Após um longo processo de seleção para preenchimento de duas vagas de emprego para engenheiro, uma empresa chegou a um conjunto de 9 engenheiros e 6 engenheiras, todos com capacitação bastante semelhante. Indeciso, o setor de recursos humanos decidiu realizar um sorteio para preencher as duas vagas oferecidas.

a) construa o modelo probabilístico, considerando que se esteja observando o sexo (masculino ou feminino) dos sorteados;

b) qual é a probabilidade de que ambos os selecionados sejam do mesmo sexo?

c) sabendo-se que ambos os selecionados são do mesmo sexo, qual é a probabilidade de serem homens?

17. Está sendo avaliada a qualidade de um lote de peças numa indústria cerâmica, onde estão misturados 30 pisos e 40 azulejos.

a) retira-se uma peça ao acaso do lote e observa-se o tipo de cerâmica. Construa o modelo probabilístico para esta situação;

b) retiram-se duas peças ao acaso do lote, uma após a outra, com reposição, e observa-se o tipo de cerâmica. Construa o modelo probabilístico para esta situação;

c) repita o item (b), supondo que não haja reposição;

d) registros anteriores da qualidade indicaram que 1,5% dos azulejos e cerca de 0,7% dos pisos apresentaram defeitos. Retira-se, ao acaso, uma peça do lote. Qual é a probabilidade de a peça apresentar defeito?

e) para as condições do item (d), qual é a probabilidade de a peça ser piso, uma vez que apresentou defeito?

18. A caixa I tem 8 peças boas e 2 defeituosas; a caixa II tem 6 peças boas e 4 defeituosas; a caixa III tem 9 peças boas e 1 defeituosa.

a) tira-se, aleatoriamente, uma peça de cada caixa. Determinar a probabilidade de serem todas boas;

b) escolhe-se uma caixa ao acaso e tira-se uma peça. Determinar a probabilidade de ser defeituosa;

c) escolhe-se uma caixa ao acaso e tira-se uma peça. Calcular a probabilidade de ter sido escolhida a caixa I, sabendo-se que a peça é defeituosa.

19. A qualidade de CDs foi avaliada em termos da resistência a arranhão e adequação das trilhas. Os resultados de 1.000 CDs foram:

Resistência a arranhão	**Adequação das trilhas**	
	Aprovado	**Reprovado**
Alta	700	140,
Baixa	100	60

Se um CD for selecionado ao acaso desse lote de 1.000 CDs, qual é a probabilidade de ele:

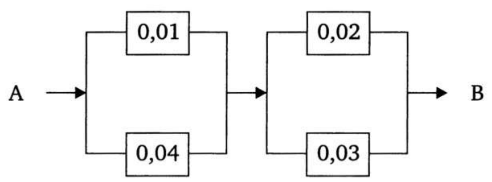
a) ter resistência a arranhão alta e ser aprovado na avaliação das trilhas?

b) ter resistência a arranhão alta ou ser aprovado na avaliação das trilhas?

c) ser aprovado na avaliação das trilhas, dado que tem resistência a arranhão alta?

d) ter resistência a arranhão alta, dado que foi aprovado na avaliação das trilhas?

20. Certo sistema funciona somente se houver um caminho fechado de A a B, com componentes que funcionam. Os componentes funcionam independentemente um dos outros. O sistema é esquematizado abaixo, assim como as probabilidades de falha de cada componente:



Calcule a probabilidade de o sistema funcionar.

21. Dois números inteiros são extraídos, aleatoriamente e sem reposição, do intervalo [- 20, 29]. Esses dois números são multiplicados. Qual é a probabilidade de o produto ser positivo?