MEDIDAS DE DISPERSÃO

EXEMPLOS DE DISTRIBUIÇÕES

SÉRIES NUMÉRICAS

Série A: **7, 8, 9, 10, 11, 12. 13.**

Série B: **1, 3, 6, 10, 14, 17, 19.**

Série C: **1007, 1008, 1009, 1010, 1011, 1012, 1013.**

TABELA DE DADOS

Ordem (j)	*Variável (x_j)*	*Freqüência (f_j)*
1	0	2
2	1	3
3	2	4
4	3	5
5	4	7
6	5	8
7	6	9
8	7	4
9	8	3
10	9	3
		48

MEDIDAS INTERVALARES

AMPLITUDE TOTAL

$$At = x_M - x_m$$

– **É a diferença entre os valores extremos do conjunto:**

Nas três séries acima:

$At_1 = 13 - 7 = 6$, $At_2 = 19 - 1 = 18$ e $At_3 = 1013 - 1007 = 6$

No caso de dados tabulados não agrupados em classes, como na tabela acima: $At = 9 - 0 = 9$

Quando os dados são agrupados em classes:

$$At = x_M - x_m$$

MEDIDAS INTERVALARES

DESVIO QUARTIL

Também chamado de amplitude inter-quartílica, o desvio quartil é a média aritmética das diferenças entre a mediana e o primeiro e terceiro quartil, o que resulta em:

$$d_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

CRÍTICA

1. **Deve ser usado quando a medida de tendência central for a mediana**
2. **O desvio quartil tem a vantagem de não ser afetado por valores extremos. Não apresenta o inconveniente discutido no caso da amplitude total.**
3. **Tem o inconveniente de não ser influenciado pela forma com que os dados se distribuem, internamente, nas três regiões separadas pelos quartis que aparecem na sua fórmula.**

DESVIO MÉDIO

DADOS NÃO TABULADOS

DESVIO MÉDIO EM RELAÇÃO À MÉDIA ARITMÉTICA

Para dados não tabulados, o desvio médio pode ser calculado diretamente a partir deles e de sua média aritmética, mediante:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| x_i - \bar{x} \right|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| d_i \right|}{n} = \frac{\sum \left| d \right|}{n}$$

DESVIO MÉDIO

DADOS NÃO TABULADOS

DESVIO MÉDIO EM RELAÇÃO À MÉDIA ARITMÉTICA

Para dados não tabulados, o desvio médio pode ser calculado diretamente a partir deles e de sua média aritmética, mediante:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |d_i|}{n} = \frac{\sum |d|}{n}$$

DESVIO MÉDIO EM RELAÇÃO À MEDIANA

Para dados não tabulados, o desvio médio pode ser calculado diretamente a partir deles e de sua mediana, mediante:

$$d_{Me} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - Me|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |d_{Me\,i}|}{n}$$

DESVIO MÉDIO

Para as séries numéricas, chega-se a:

$$\bar{d}_A = \frac{|7-10| + |8-10| + \ldots + |13-10|}{7} = \frac{12}{7} = 1{,}714$$

$$\bar{d}_B = \frac{|1-10| + |3-10| + \ldots + |19-10|}{7} = \frac{40}{7} = 5{,}714$$

$$\bar{d}_C = \frac{|1007-1010| + |1008-1010| + \ldots + |1013-1010|}{7} = 1{,}714$$

DESVIO MÉDIO

DADOS TABULADOS

DESVIO MÉDIO EM RELAÇÃO À MÉDIA ARITMÉTICA

$$\bar{d} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \left| x_j - \bar{x} \right| f_j}{\sum_{j=1}^{k} f_j} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \left| d_j \right| f_j}{n} = \frac{\sum \left| d \right| f}{n}$$

DESVIO MÉDIO

DADOS TABULADOS

DESVIO MÉDIO EM RELAÇÃO À MÉDIA ARITMÉTICA

$$\bar{d} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \left| x_j - \bar{x} \right| f_j}{\sum_{j=1}^{k} f_j} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \left| d_j \right| f_j}{n} = \frac{\sum \left| d \right| f}{n}$$

DESVIO MÉDIO EM RELAÇÃO À MEDIANA

$$d_{Me} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \left| x_j - Me \right| f_j}{\sum_{j=1}^{k} f_j} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \left| d_{Me\ j} \right| f_j}{n}$$

DESVIO MÉDIO

DADOS TABULADOS

ACHA-SE A MÉDIA: $$\bar{x} = \frac{\sum x f}{\sum f} = \frac{\sum x f}{n} = \frac{227}{48} = 4{,}729$$

j	x_j	f_j	$x_j f_j$
1	0	2	0
2	1	3	3
3	2	4	8
4	3	5	15
5	4	7	28
6	5	8	40
7	6	9	54
8	7	4	28
9	8	3	24
10	9	3	27
		48	227

DESVIO MÉDIO

DADOS TABULADOS

ACHA-SE O DESVIO MÉDIO: $$\bar{d} = \frac{\sum |d| f}{n} = \frac{90,626}{48} = 1,888$$

j	x_j	f_j	$x_j \, f_j$	$d_j = x_j - \bar{x}$	$\lvert d_j \rvert$	$\lvert d_j \rvert \, f_j$
1	0	2	0	0 - 4,729 = - 4,729	4,729	9,458
2	1	3	3	1 - 4,729 = - 3,729	3,729	11,187
3	2	4	8	2 - 4,729 = - 2,729	2,729	10,916
4	3	5	15	3 - 4,729 = - 1,729	1,729	8,645
5	4	7	28	4 - 4,729 = - 0,729	0,729	5,103
6	5	8	40	5 - 4,729 = 0,271	0,271	2,168
7	6	9	54	6 - 4,729 = 1,271	1,271	11,439
8	7	4	28	7 - 4,729 = 2,271	2,271	9,084
9	8	3	24	8 - 4,729 = 3,271	3,271	9,813
10	9	3	27	9 - 4,729 = 4,271	4,271	12,813
		48	227			90,626

VARIÂNCIA

PELA DEFINIÇÃO

$$\sigma^{2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}}{n}$$

VARIÂNCIA

PELA DEFINIÇÃO

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}}{n}$$

$$\sigma_A^2 = \frac{\left(7\text{-}10\right)^2 + \left(8-10\right)^2 + \ldots + \left(13-10\right)^2}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

$$\sigma_B^2 = \frac{\left(1\text{-}10\right)^2 + \left(3-10\right)^2 + \ldots + \left(19-10\right)^2}{7} = \frac{292}{7} = 41{,}714$$

$$\sigma_C^2 = \frac{\left(1007\ \text{-}1010\right)^2 + \left(1008 - 1010\right)^2 + \ldots + \left(1013 - 1010\right)^2}{7} = 4$$

VARIÂNCIA

PELO MÉTODO SIMPLIFICADO

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \right)^2 = \bar{x}_q^2 - \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

ONDE $\bar{x}_q$ É CHAMADA DE MÉDIA QUADRÁTICA E VALE:

$$\bar{x}_q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

E POR CONSEGUINTE $\overline{x^2}$, A MÉDIA DOS QUADRADOS VALE:

$$\overline{x^2} = \bar{x}_q^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$$

VARIÂNCIA

PELO MÉTODO SIMPLIFICADO

$$\sigma_A^2 = \frac{7^2+8^2+9^2+10^2+11^2+12^2+13^2}{7} - 10^2 = \frac{728}{7} - 100 = 4$$

$$\sigma_B^2 = \frac{1^2+3^2+6^2+10^2+14^2+17^2+19^2}{7} - 10^2 = \frac{992}{7} - 100 = 41{,}714$$

$$\sigma_C^2 = \frac{1007^2+1008^2+\ldots+1013^2}{7} - 1010^2 = \frac{7140728}{7} - 1020100 = 4$$

DESVIO PADRÃO

PELA DEFINIÇÃO

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}}{n}}$$

PELO MÉTODO SIMPLIFICADO

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2} = \sqrt{\overline{x}_q^2 - \overline{x}^2} = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$$

POPULAÇÃO E AMOSTRA

AMOSTRA

VARIÂNCIA

$$s^2 = \sigma^2 \frac{n}{n-1}$$

DESVIO PADRÃO

$$s = \sqrt{s^2} = \sigma \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

VARIÂNCIA E DESVIO PADRÃO PARA DADOS TABULADOS (DEFINIÇÃO)

VARIÂNCIA POPULACIONAL

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k}(x_j - \overline{x})^2 f_j}{\sum_{j=1}^{k} f_j} = \frac{\sum_{j=1}^{k} d_j^2 f_j}{n} = \frac{\sum d^2 f}{\sum f} = \frac{\sum d^2 f}{n}$$

DESVIO PADRÃO POPULACIONAL

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

VARIÂNCIA AMOSTRAL

$$s^2 = \sigma^2 \frac{n}{n-1}$$

DESVIO PADRÃO AMOSTRAL

$$s = \sqrt{s^2} = \sigma \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

VARIÂNCIA E DESVIO PADRÃO PARA DADOS TABULADOS (SIMPLIFICADO)

VARIÂNCIA POPULACIONAL $$\sigma^2 = \overline{x}_q^2 - \overline{x}^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

ONDE:

$$\overline{x^2} = \overline{x}_q^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} x_j^2 f_j}{\sum_{j=1}^{k} f_j} = \frac{\sum_{j=1}^{k} x_j^2 f_j}{n} = \frac{\sum x^2 f}{\sum f} = \frac{\sum x^2 f}{n}$$

$$\overline{x} = \frac{\sum_{j=1}^{k} x_j f_j}{\sum_{j=1}^{k} f_j} = \frac{\sum_{j=1}^{k} x_j f_j}{n} = \frac{\sum x f}{\sum f} = \frac{\sum x f}{n}$$

VARIÂNCIA E DESVIO PADRÃO PARA DADOS TABULADOS (SIMPLIFICADO)

DESVIO PADRÃO POPULACIONAL

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\overline{x}_q^2 - \overline{x}^2} = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$$

VARIÂNCIA AMOSTRAL

$$s^2 = \sigma^2 \frac{n}{n-1}$$

DESVIO PADRÃO AMOSTRAL

$$s = \sqrt{s^2} = \sigma \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

VARIÂNCIA E DESVIO PADRÃO PARA DADOS TABULADOS (DEFINIÇÃO)

EXEMPLO DA TABELA

j	x_j	f_j	$x_j \; f_j$
1	0	2	0
2	1	3	3
3	2	4	8
4	3	5	15
5	4	7	28
6	5	8	40
7	6	9	54
8	7	4	28
9	8	3	24
10	9	3	27
		48	227

VARIÂNCIA E DESVIO PADRÃO PARA DADOS TABULADOS (DEFINIÇÃO)

EXEMPLO DA TABELA

CALCULA-SE A MÉDIA:

$$\bar{x} = \frac{\sum x\, f}{\sum f} = \frac{\sum x\, f}{n} = \frac{227}{48} = 4{,}729$$

j	x_j	f_j	$x_j\, f_j$
1	0	2	0
2	1	3	3
3	2	4	8
4	3	5	15
5	4	7	28
6	5	8	40
7	6	9	54
8	7	4	28
9	8	3	24
10	9	3	27
		48	227

VARIÂNCIA E DESVIO PADRÃO PARA DADOS TABULADOS (DEFINIÇÃO)

COMPLETA-SE A TABELA:

j	x_j	f_j	$x_j\ f_j$	$d_j = x_j - \overline{x}$	$d_j^{\,2}$	$d_j^{\,2}\ f_j$
1	0	2	0	0 - 4,729 = - 4,729	22,363	44,726
2	1	3	3	1 - 4,729 = - 3,729	13,905	41,715
3	2	4	8	2 - 4,729 = - 2,729	7,447	29,788
4	3	5	15	3 - 4,729 = - 1,729	2,989	14,945
5	4	7	28	4 - 4,729 = - 0,729	0,531	3,717
6	5	8	40	5 - 4,729 = 0,271	0,073	0,584
7	6	9	54	6 - 4,729 = 1,271	1,615	14,535
8	7	4	28	7 - 4,729 = 2,271	5,157	20,628
9	8	3	24	8 - 4,729 = 3,271	10,699	32,097
10	9	3	27	9 - 4,729 = 4,271	18,241	54,723
		48	227			257,458

VARIÂNCIA E DESVIO PADRÃO PARA DADOS TABULADOS (DEFINIÇÃO)

E ENCONTRA-SE A VARIÂNCIA POPULACIONAL:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} d_j^2 f_j}{\sum_{j=1}^{k} f_j} = \frac{257{,}458}{48} = 5{,}364$$

j	x_j	f_j	$x_j f_j$	$d_j = x_j - \overline{x}$	d_j^2	$d_j^2 f_j$
1	0	2	0	0 - 4,729 = - 4,729	22,363	44,726
2	1	3	3	1 - 4,729 = - 3,729	13,905	41,715
3	2	4	8	2 - 4,729 = - 2,729	7,447	29,788
4	3	5	15	3 - 4,729 = - 1,729	2,989	14,945
5	4	7	28	4 - 4,729 = - 0,729	0,531	3,717
6	5	8	40	5 - 4,729 = 0,271	0,073	0,584
7	6	9	54	6 - 4,729 = 1,271	1,615	14,535
8	7	4	28	7 - 4,729 = 2,271	5,157	20,628
9	8	3	24	8 - 4,729 = 3,271	10,699	32,097
10	9	3	27	9 - 4,729 = 4,271	18,241	54,723
		48	227			257,458

VARIÂNCIA E DESVIO PADRÃO PARA DADOS TABULADOS (SIMPLIFICADO)

EXEMPLO DA TABELA

j	x_j	f_j	$x_j\ f_j$
1	0	2	0
2	1	3	3
3	2	4	8
4	3	5	15
5	4	7	28
6	5	8	40
7	6	9	54
8	7	4	28
9	8	3	24
10	9	3	27
		48	227

VARIÂNCIA E DESVIO PADRÃO PARA DADOS TABULADOS (SIMPLIFICADO)

EXEMPLO DA TABELA

CALCULA-SE APENAS UMA COLUNA A MAIS:

j	x_j	f_j	$x_j\ f_j$	$x_j^2\ f_j$
1	0	2	0	0
2	1	3	3	3
3	2	4	8	16
4	3	5	15	45
5	4	7	28	112
6	5	8	40	200
7	6	9	54	324
8	7	4	28	196
9	8	3	24	192
10	9	3	27	243
		48	227	1331

VARIÂNCIA E DESVIO PADRÃO PARA DADOS TABULADOS (SIMPLIFICADO)

E ENCONTRA-SE A VARIÂNCIA POPULACIONAL:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \left(\frac{\sum x f}{\sum f}\right)^2 = \bar{x}_q^2 - \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{1331}{48} - \left(\frac{227}{48}\right)^2 = 5{,}364$$

j	x_j	f_j	$x_j f_j$	$x_j^2 f_j$
1	0	2	0	0
2	1	3	3	3
3	2	4	8	16
4	3	5	15	45
5	4	7	28	112
6	5	8	40	200
7	6	9	54	324
8	7	4	28	196
9	8	3	24	192
10	9	3	27	243
		48	227	1331

VARIÂNCIA E DESVIO PADRÃO PARA DADOS TABULADOS (EXEMPLO)

E CONSEGUEM-SE:

O DESVIO PADRÃO POPULACIONAL:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\overline{x}_q^2 - \overline{x}^2} = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \sqrt{5{,}364} = 2{,}316$$

A VARIÂNCIA AMOSTRAL:

$$s^2 = \sigma^2 \frac{n}{n-1} = 5{,}364 \; \frac{48}{48-1} = 5{,}478$$

O DESVIO PADRÃO AMOSTRAL:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{5{,}478} = 2{,}341$$

MEDIDAS DE DISPERSÃO RELATIVA

COEFICIENTE DE VARIAÇÃO DE PEARSON

CALCULAM-SE O COEFICIENTE NAS FORMAS PROPORCIONAL OU PERCENTUAL, UTILIZANDO-SE O DESVIO PADRÃO ADEQUADO AO CASO QUE PODE SER O DA POPULAÇÃO OU O ESTIMADO A PARTIR DA AMOSTRA.

$$CV_P = \frac{\sigma}{\mu}$$

$$CV_P = 100\,\frac{\sigma}{\mu}$$

$$CV_P = \frac{s}{\bar{x}}$$

$$CV_P = 100\,\frac{s}{\bar{x}}$$

MEDIDAS DE DISPERSÃO RELATIVA

COEFICIENTE DE VARIAÇÃO DE PEARSON

$$CV_P = \frac{\sigma}{\bar{x}} \qquad\qquad CV_P = 100\,\frac{\sigma}{\bar{x}}$$

COEFICIENTE DE VARIAÇÃO DE PEARSON

	PROPORC	PERCENT	PROPORC	PERCENT
SÉRIEA	0,2000	20,00	0,2160	21,60
SÉRIE B	0,6459	64,59	0,6977	69,77
SÉRIE C	0,00198	0,198	0,00214	0,214
TABELA	0,4897	48,97	0,4950	49,50

MEDIDAS DE DISPERSÃO RELATIVA

COEFICIENTE DE VARIAÇÃO DE THORNDIKE

CALCULAM-SE O COEFICIENTE NAS FORMAS PROPORCIONAL OU PERCENTUAL, UTILIZANDO-SE O DESVIO PADRÃO ADEQUADO AO CASO QUE PODE SER O DA POPULAÇÃO OU O ESTIMADO A PARTIR DA AMOSTRA.

$$CV_T = \frac{\sigma}{Me} \qquad CV_T = 100\,\frac{\sigma}{Me}$$

$$CV_T = \frac{s}{Me} \qquad CV_T = 100\,\frac{s}{Me}$$

MEDIDAS DE DISPERSÃO RELATIVA

DESVIO QUARTIL REDUZIDO

$$d_{QR} = \frac{d_Q}{Me} = \frac{Q_3 - Q_1}{2\,Me} \qquad d_{QR} = 100\,\frac{d_Q}{Me} = 50\,\frac{Q_3 - Q_1}{Me}$$

COEFICIENTE QUARTÍLICO DE VARIAÇÃO

$$CV_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \qquad CV_Q = 100\,\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$